UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLLOS EDUARDO ALVES DE HOLANDA

FORMALISMO TERMODINÂMICO E O MODELO DE ISING

Maceió-AL

2017

CARLLOS EDUARDO ALVES DE HOLANDA

FORMALISMO TERMODINÂMICO E O MODELO DE ISING

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins de Oliveira

Maceió-AL
2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

H722f Holanda, Carllos Eduardo Alves de.
Formalismo termodinâmico e o modelo de Ising / Carllos Eduardo Alves de Holanda. – 2018.
80 f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins de Oliveira.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 79-80.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Entropia. 3. Ising, Modelo de. 4. Gibbs, Estados de. 5. Formalismo termodinâmico. I. Título.

CDU: 515.12

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CARLLOS EDUARDO ALVES DE HOLANDA

Formalismo Termodinâmico e o Modelo de Ising

Dissertação de mestrado na área de concentração em Sistemas Dinâmicos submetida em 22/12/2017 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários para à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Bancâ Examinadora

Krerley Oliveira

Dr. Krerley Irraciel Martins de Oliveira - Orientador (UFAL)

Leandro Martins Cioletti

Dr. Leandro Martins Cioletti (Universidade de Brasília)

Wagner Ranter Gouveia da Silva

Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva (UFAL)

Resumo

Estudaremos propriedades básicas de entropia métrica, entropia topológica, princípio variacional e estados de equilíbrio para transformações quaisquer e a extensão desses conceitos para shifts multidimensionais de tipo finito. Também será realizado um estudo das distribuições de Gibbs e o problema de transição de fase do Modelo de Ising.

Palavras-chave: Entropia, Modelo de Ising, Estados de Gibbs

Abstract

We study basic properties of metric entropy, topological entropy, variational principle and states of equilibrium for any transformations and the extension of these concepts to multi-dimensional shifts of finite type. We also study the Gibbs distributions and the problem of phase transitions in the Ising model.

Keywords: Entropy, Ising Model, Gibbs States

Sumário

Introdução

A *Teoria Ergódica* é um ramo da Matemática que estuda *Sistemas Dinâmicos* com alguma *Medida Invariante*. O desenvolvimento dessa teoria foi motivado por problemas de *Mecânica Estatística*, mais especificamente, Teoria Cinética dos Gases, desenvolvida principalmente pelos físicos L. Boltzmann, J. C. Maxwell e J. C. Gibbs no século XIX.

Nesse contexto de Teoria Ergódica, surgiu uma tentativa de descrever rigorosamente as estruturas matemáticas por trás do equilíbrio termodinâmico na teoria de mecânica estatística. Isso foi feito, sobretudo, pelo físico-matemático D. Ruelle em seu trabalho pioneiro *Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas* ([Rue68]). Assim surgia a teoria moderna do *Formalismo Termodinâmico*, onde o posterior desenvolvimento inclui conceitos centrais como *entropia*, *pressão*, *princípio variacional* e *estados de equilíbrio* relacionados à sistemas dinâmicos em geral.

Um dos maiores desafios é tentar compreender os fenômenos físicos de *transição de fase* (mudança de estado físico) como, por exemplo, a passagem de água do estado sólido para o líquido ou a magnetização de sólidos. Esses sistemas físicos são formados por um grande número de unidades (ou partículas, ou sítios) que interagem entre si. Para se ter uma ideia do conceito de "grande"em exemplos concretos, o número de moléculas de água em apenas um litro é da ordem de 10^{27}.

Muito do estudo do formalismo termodinâmico envolve *estados* de sistemas infinitos. Para sistemas clássicos, os estados consistem de medidas de probabilidade em um espaço apropriado de configurações infinitas. Devido à simplicidade, no desenvolvimento da teoria foi dada uma maior atenção à sistemas clássicos reticulados (reticulado inteiro d-dimensional $\mathbb{Z}^d$). Para tais sistemas o espaço de configurações é um subconjunto Ω de $\prod_{x\in\mathbb{Z}^d}\Omega_x$, onde Ω_x é, por exemplo, o conjunto de possíveis valores de spin (sistemas magnéticos) ou "números de ocupação"(sistemas com partículas de gás) para o sítio x. Nesse cenário, se estudam os chamados *Estados de Gibbs* ou *Medidas de Gibbs*, que podem ser vistos, em um certo sentido, como sendo limites de distribuições de probabilidade usadas para modelagem de sistemas clássicos com número finito de configurações. Através da interpretação de Dobrushin ([Dob68]), na modelagem matemática em geral, os estados de Gibbs estão conectados com a existência de transição de fase do sistema estudado.

Um dos modelos mais estudados em mecânica estatística é o Modelo de Ising. Este modelo foi desenvolvido para buscar um melhor entendimento de transição de fase em sistemas magnéticos. O espaço de configurações é considerado como sendo $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, ou seja, o espaço de todas as configurações possíveis com spin +1 ou -1 em cada sítio ou átomo do reticulado d-dimensional $\mathbb{Z}^d$. O estudo de transição de fase para este modelo pode ser feito de modo probabilístico, usando estados de Gibbs ou através do tratamento analítico, utilizando uma função *pressão* associada.

Em espaços de configurações definidos em reticulados inteiros existe uma dinâmica natural importante: *shifts* ou *deslocamentos* multidimensionais de tipo finito. O tratamento do formalismo termodinâmico para o caso multidimensional é geralmente realizado usando os conceitos e resultados gerais estendidos para o caso de *ações de grupo*. Assim como no caso de deslocamentos unidimensionais, nesse contexto aparecem as relações envolvendo entropia topológica e entropia métrica através de um princípio variacional e também questões abordando estados de equilíbrio e medidas de máxima entropia. Estes tópicos são instrumentos importantes da teoria de *Dinâmica Simbólica*.

1 Formalismo Termodinâmico Geral

1.1 Entropia Métrica

Nesta seção daremos a definição formal da entropia de Kolmogorov-Sinai, por vezes também conhecida como entropia métrica. Esta noção de entropia serviu como modelo para o posterior desenvolvimento da entropia topológica.

1.1.1 Entropia de um Sistema Dinâmico

Definição 1.1.1. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma partição é uma família finita ou enumerável $\mathcal{P}$ de subconjuntos mensuráveis de M, disjuntos dois-a-dois e cuja união é M.*

Denotamos por $\mathcal{P}(x)$ o elemento da partição que contém o ponto x. A *soma* $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é a partição cujos elementos são as intersecções $P \cap Q$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Mais geralmente, dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \quad \forall n \right\}.$$

Chamamos *entropia* de uma partição dada $\mathcal{P}$ ao número

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P).$$

Nessa definição, fazemos a convenção de que

$$0 \log 0 = \lim_{x \to 0} x \log x = 0.$$

Para quaisquer duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de M, dizemos que $\mathcal{P}$ é *menos fina* que $\mathcal{Q}$, e escrevemos $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, se todo elemento de $\mathcal{Q}$ está contido em algum elemento de $\mathcal{P}$.

O conjunto $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ acima é uma partição e podemos ver que, em geral, vale que $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$.

Agora seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável preservando uma medida de probabilidade μ. Dada uma partição $\mathcal{P}$ de M com entropia finita, denotamos

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \text{ para cada } n \geq 1.$$

Podemos observar que a sequência $\mathcal{P}^n$ é não-decrescente, ou seja, $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{P}^{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Portanto, a sequência da entropias $H_\mu(\mathcal{P}^n)$ também é não-decrescente. Além disso, podemos mostrar que essa sequência é subaditiva, ou seja, $H_\mu(\mathcal{P}^{n+m}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^n) + H_\mu(\mathcal{P}^m)$ para todo $m, n \geq 1$.

Chamamos de *entropia de f com respeito à medida μ e à partição $\mathcal{P}$* o limite

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

Por fim, podemos definir a *entropia* do sistema (f, μ) como sendo

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições com entropia finita.

1.2 Entropia Topológica

Nesta seção serão abordados dois tipos de definição de entropia topológica, as definições de Adler-Konheim-McAndrew ([AKM65]) e de Bowen-Dinaburg ([Din70]). Será provado que essas duas abordagens são equivalentes quando o ambiente é um espaço métrico compacto.

1.2.1 Definição via coberturas abertas

Seja M um espaço topológico compacto. Chamamos cobertura aberta de M qualquer família de abertos cuja união é todo o M. Por definição, toda cobertura aberta admite uma subcobertura (isto é, uma subfamília que ainda é uma cobertura) com um número finito de elementos.

Definição 1.2.1. Para qualquer cobertura aberta α de M, $N(\alpha)$ denota o número de conjuntos em uma subcobertura de cardinalidade mínima. Uma subcobertura de uma cobertura é mínima se nenhuma outra subcobertura contém menos elementos.

Sendo M compacto e α uma cobertura aberta, uma tal subcobertura minimal sempre existe. Assim, chamamos *entropia* da cobertura α ao número

$$H(\alpha) := \log N(\alpha) \tag{1.1}$$

Definição 1.2.2. Para quaisquer duas coberturas abertas α e β,

i) dizemos que α é *menos fina* que β, e escrevemos $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α.

ii) denotamos a sua soma, a cobertura dada por $\alpha \vee \beta := \{A \cap B; A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Da mesma forma podemos definir $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee ... \vee \alpha_n$, como sendo a cobertura cujos elementos são as intersecções $A_1 \cap ... \cap A_n$ com $A_j \in \alpha_j$ para cada j.

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua. Se α é uma cobertura aberta de M então $f^{-j}(\alpha) := \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta. Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee ... \vee f^{-n+1}(\alpha).$$

Na seguinte proposição, resumimos algumas propriedades básicas de entropia de coberturas.

Proposição 1.2.3. *Sejam α, α', β e β' coberturas abertas do espaço topológico compacto M e $f : M \to M$ uma transformação contínua.*

a) *Se $\alpha \prec \beta$, então $H(\alpha) \leq H(\beta)$.*

b) $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

c) $H(f^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$.

d) *Se f é sobrejetiva, então $H(f^{-1}(\alpha)) = H(\alpha)$.*

a): Seja $\{B_1, ..., B_{N(\beta)}\}$ uma subcobertura minimal de β. Uma vez que $\alpha \prec \beta$ para cada $B_k \in \beta$ existe um $A_k \in \alpha$ tal que $B_k \subset A_k$. Disso, $\{A_1, ..., A_{N(\beta)}\}$ é uma subcobertura de α não necessariamente minimal. Portanto, $N(\alpha) \leq N(\beta)$ e segue que $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

b): Sejam $\{A_1, ..., A_{N(\alpha)}\}$ e $\{B_1, ..., B_{N(\beta)}\}$ subcoberturas minimais de α e β, respectivamente. Então, $\{A_i \cap B_j, i = 1, ..., N(\alpha)$ e $j = 1, ..., N(\beta)\}$ é uma subcobertura de $\alpha \vee \beta$ não necessariamente minimal com no máximo $N(\alpha) \cdot N(\beta)$ elementos. Então, $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha).N(\beta)$. Logo, $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

c): Seja $\{A_1, ..., A_{N(\alpha)}\}$ uma subcobertura minimal de α. Observe que $\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ é uma subcobertura de $f^{-1}(\alpha)$ possivelmente não minimal. Logo, $N(f^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha)$ e, consequentemente, $H(f^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$.

d): Suponha por absurdo que $\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ não seja uma subcobertura minimal de $f^{-1}(\alpha)$. Então, podemos encontrar uma subcobertura minimal de $f^{-1}(\alpha)$ da forma $\{f^{-1}(B_1), ..., f^{-1}(B_m)\}$ com $B_j \in \alpha$ para todo $j = 1, ..., m$ e tal que $m < N(\alpha)$. Como f é sobrejetiva, podemos escrever

$$M = f(M) = f\left(\bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(B_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

Segue que $\{B_1, ..., B_m\}$ é subcobertura minimal de α com $m < N(\alpha)$ elementos, o que é uma contradição. Portanto, $N(f^{-1}(\alpha)) = N(\alpha)$ e o resultado segue.

Definição 1.2.4. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é chamada *subaditiva* quando satisfaz a condição $x_{n+m} \leq x_n + x_m$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Lema 1.2.5. (Fekètè). *Para toda sequência subaditiva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \geq 0$, o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ sempre existe e é igual a $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$.*

Ver [OV15].

Agora, usando a Proposição 1.2.3, observe que

$$H(\alpha^{n+m}) = H(\alpha^n \vee f^{-n}(\alpha^m)) \leq H(\alpha^n) + H(f^{-n}(\alpha^m)) \leq H(\alpha^n) + H(\alpha^m)$$

para todo $m, n \geq 1$. Ou seja, a sequência $H(\alpha^n)$ é subaditiva. Consequentemente, pelo Lema 1.5,

$$h(f, \alpha) := \lim_{n} \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_{n} \frac{1}{n} H(\alpha^n) \tag{1.2}$$

sempre existe. Este limite é chamado de *entropia de f com respeito à cobertura α.* O item a) da Proposição 1.3 implica que

$$\alpha \prec \beta \Rightarrow h(f,\alpha) \leq h(f,\beta). \tag{1.3}$$

Finalmente, podemos definir a *entropia topológica* de f como sendo

$$h(f) = \sup_{\alpha}\{h(f,\alpha) : \alpha \text{ é cobertura aberta de M.}\} \tag{1.4}$$

Em particular, se β é subcobertura de α então $h(f,\alpha) \leq h(f,\beta)$. Dessa forma, a definição de entropia topológica não muda se restringirmos o supremo às coberturas abertas finitas.

Agora, iremos mostrar um importante resultado: a entropia topológica é um invariante de equivalência topológica.

Definição 1.2.6. Seja $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaços topológicos compactos M e N. Dizemos que g é um fator topológico de f se existe uma aplicação contínua sobrejetiva $\theta : M \to N$ satisfazendo $\theta \circ f = g \circ \theta$. Quando h for invertível (homeomorfismo), dizemos que as duas transformações são topologicamente equivalentes, ou topologicamente conjugadas, e chamamos h de uma conjugação topológica entre f e g.

Proposição 1.2.7. *Se g é um fator topológico de f então $h(g) \leq h(f)$. Em particular, se f e g são topologicamente equivalentes então $h(f) = h(g)$.*

Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação contínua sobrejetiva tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$. Dada uma cobertura α de N, a família

$$\phi^{-1}(\alpha) = \{\phi^{-1}(A) : A \in \alpha\}$$

é uma cobertura aberta de M. Dados quaisquer conjuntos $A_0, A_1, ..., A_{n-1} \in \alpha$, temos que:

$$\phi^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\right) = \bigcap_{j=0}^{n-1} \phi^{-1}(g^{-j}(A_j)) = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\phi^{-1}(A_j))$$

.

Por definição, $\phi^{-1}(\alpha^n)$ está formada pelos conjuntos do lado esquerdo desta igualdade, enquanto que os conjuntos do lado direito constituem $(\phi^{-1}(\alpha))^n$. Portanto, $\phi^{-1}(\alpha^n) = (\phi^{-1}(\alpha))^n$. Como ϕ é sobrejetiva, uma família $\gamma \subset \alpha^n$ cobre N se, e somente se, $\phi^{-1}(\gamma)$ cobre M. Portanto, $\phi((\phi^{-1}(\alpha))^n) = \phi(\phi^{-1}(\alpha^n)) = \phi(\alpha^n)$. Dessa forma, $h(g, \alpha) = h(f, \phi^{-1}(\alpha))$. Agora, tomando o supremo sobre todas as coberturas α de N:

$$h(g) = \sup_{\alpha} h(g, \alpha) = \sup_{\alpha} h(f, \phi^{-1}(\alpha)) \leq h(f).$$

Isso prova a primeira parte. A segunda parte é uma consequência direta, uma vez que nesse caso f também é fator topológico de g.

1.2.2 Entropia Topológica de Bowen

A seguir, será apresentada a definição de entropia topológica de Bowen-Dinaburg. Aqui, M será considerado um espaço métrico não necessariamente compacto e $K \subset M$ é um subconjunto compacto qualquer. Quando M for compacto, basta considerar $K = M$.

Definição 1.2.8. Dados $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um conjunto $E \subset M$ é um $(n, \epsilon) -$ *gerador* de K, se para todo $x \in K$ existe $a \in E$ tal que $d(f^i(x), (f^i(a)) < \epsilon$ para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.

Definição 1.2.9. Dados $a, \epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ chamamos de *bola dinâmica* de centro a, comprimento n e raio ϵ o conjunto $B(a, n, \epsilon) = \{x \in M : d(f^i(x), (f^i(a)) < \epsilon$ para $i = 0, ..., n-1\}$.

Baseado na última definição, é facil ver que

$$K \subset \bigcup_{a \in E} B(a, n, \epsilon).$$

Note que $\{B(x, n, \epsilon) : x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K. Logo, por compacidade, sempre existem conjuntos (n, ϵ)-geradores finitos. Vamos denotar por $g_n(f, \epsilon, K)$ a menor cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-gerador de K. Definimos

$$g(f, \epsilon, K) := \limsup_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, K). \tag{1.5}$$

Observe que da definição acima, se $\epsilon_1 < \epsilon_2$ então todo conjunto (n, ϵ_1)-gerador é também (n, ϵ_2)-gerador. Portanto, $g_n(f, \epsilon_1, K) \geq g_n(f, \epsilon_2, K)$ para todo $n \geq 1$ e, tomando o limite, $g(f, \epsilon_1, K) \geq g(f, \epsilon_2, K)$. Ou seja, a função $\epsilon \longmapsto g(f, \epsilon, K)$ é monótona não-crescente e isso garante, em particular, que

$$g(f, K) := \lim_{\epsilon \to 0} g(f, \epsilon, K) \tag{1.6}$$

existe. Finalmente, podemos definir

$$g(f) := \sup_{K} \{g(f, K) : K \subset M \text{ compacto}\}. \tag{1.7}$$

Também é possível introduzir uma noção dual de conjunto gerador.

Definição 1.2.10. Dados $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, dizemos que um conjunto $E \subset K$ é $(n, \epsilon) -$ *separado* se dados $x, y \in E$ existe $j \in \{0, ..., n-1\}$ tal que $d(f^i(x), (f^i(y)) \geq \epsilon$. Em outras palavras, se $x \in E$ então $B(x, n, \epsilon)$ não contém nenhum outro ponto de E.

Denotamos por $s_n(f, \epsilon, K)$ a máxima cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-separado. Com isso, definimos

$$s(f, \epsilon, K) := \limsup_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, K). \tag{1.8}$$

Note que se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, então todo conjunto (n, ϵ_2)-separado é também (n, ϵ_1)-separado. Logo, $s_n(f, \epsilon_1, K) \geq s_n(f, \epsilon_2, K)$ para todo $n \geq 1$ e, passando o limite, $s(f, \epsilon_1, K) \geq s(f, \epsilon_2, K)$. Em particular, o limite

$$s(f, K) := \lim_{\epsilon \to 0} s(f, \epsilon, K) \tag{1.9}$$

sempre existe. Em cima disso, podemos definir

$$s(f) := \sup_K \{s(f,K) : K \subset M \text{ compacto}\}. \tag{1.10}$$

Observe que quando $K_1 \subset K_2$, temos $g(f,K_1) \leq g(f,K_2)$ e $s(f,K_2) \leq s(f,K_1)$. Em particular, também é verdade que:

$$g(f) = g(f,M) \text{ e } s(f) = s(f,M) \text{ se } M \text{ é compacto}. \tag{1.11}$$

Lema 1.2.11. *$g_n(f,\epsilon,K) \leq s_n(f,\epsilon,K) \leq g_n(f,\epsilon/2,K)$ para todo $n \geq 1$, todo $\epsilon > 0$ e todo compacto $K \subset M$.*

Seja $E \subset K$ um conjunto (n,ϵ)-separado com cardinalidade máxima. Então, dado qualquer $y \in K - E$, temos que $E \cup \{y\}$ não é (n,ϵ)-separado. Portanto, existe $x \in E$ e existe $i \in \{0,...,n-1\}$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$. Isto prova que E é um conjunto (n,ϵ)-gerador de K e isso implica que $g_n(f,\epsilon,K) \leq \#E = s_n(f,\epsilon,K)$. Para provar a outra desigualdade, seja $E \subset K$ um conjunto (n,ϵ)-separado e seja $F \subset M$ um conjunto $(n,\epsilon/2)$-gerador de K. A hipótese garante que, dado qualquer $x \in E$ existe algum ponto $y \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(y) < \epsilon/2$ para todo $i \in \{0,...,n-1\}$. Agora defina uma aplicação $\phi : E \to F$ considerando $\phi(x)$ como sendo qualquer ponto y nessas condições acima. Afirmamos que a aplicação ϕ é injetiva. De fato, suponha que $x, z \in E$ são tais que $\phi(x) = \phi(z) = y$. Então,

$$d(f^i(x), f^i(z)) \leq d(f^i(x), f^i(y)) + d(f^i(y), f^i(z)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

para todo $i \in \{0,...,n-1\}$. Como E é (n,ϵ)-separado, temos que $x = z$. Portanto, ϕ é injetiva, como foi afirmado. Segue que $\#E \leq \#F$. Como E e F são arbitrários, isso prova que $s_n(f,\epsilon,K) \leq g_n(f,\epsilon/2,K)$.

Proposição 1.2.12. *$g(f,K) = s(f,K)$ para todo compacto $K \subset M$. Consequentemente, $g(f) = s(f)$.*

Pelo lema anterior, dado qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer compacto $K \subset M$,

$$g(f,\epsilon,K) = \limsup_n \frac{1}{n}\log g_n(f,\epsilon,K) \leq \limsup_n \frac{1}{n}\log s_n(f,\epsilon,K)$$
$$\leq \limsup_n \frac{1}{n}\log g_n(f,\epsilon/2,K) = g(f,\epsilon,K).$$

Tomando o limite $\epsilon \to 0$, obtemos

$$g(f,K) = \lim_{\epsilon\to 0} g(f,\epsilon,K) \leq \lim_{\epsilon\to 0} s(f,\epsilon,K) = s(f,K) \leq \lim_{\epsilon\to 0} g(f,\epsilon/2,K) = g(f,K).$$

Isso prova a primeira parte. A segunda parte é consequência imediata, uma vez que K é compacto.

Proposição 1.2.13. *Se M é espaço métrico compacto, $h(f) = g(f) = s(f)$.*

Pela Proposição 1.2.12, basta mostrar que $s(f) \leq h(f) \leq g(f)$. Fixe $\epsilon > 0$ e $n \geq 1$. Seja $E \subset M$ um conjunto (n,ϵ)-separado e seja α qualquer cobertura aberta de M com diâmetro menor que ϵ. Se x e y estão no mesmo elemento de α^n, então

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq \text{diam } \alpha < \epsilon \text{ para todo } i = 0,1,...,n-1$$

Em particular, cada elemento de α^n contêm no máximo um elemento de E e, portanto, $\#E \leq N(\alpha^n)$. Tomando E com cardinalidade maximal, concluímos que $s_n(f,\epsilon,M) \leq N(\alpha^n)$ para todo $n \geq 1$. Consequentemente,

$$s(f,\epsilon,M) = \limsup_n \frac{1}{n}\log s_n(f,\epsilon,M) \leq \lim_n \frac{1}{n}\log N(\alpha^n) = h(f,\alpha) \leq h(f).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos que $s(f) = s(f,M) \leq h(f)$. Em seguida, dada qualquer cobertura aberta α de M, seja $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue para α, ou seja, um número positivo tal que toda bola de raio ϵ está contida em algum elemento de α. Seja $E \subset M$ um conjunto (n,ϵ)-gerador de M com cardinalidade minimal. Para cada $x \in E$ e $i = 0,1,...,n-1$, existe $A_{x,i} \in \alpha$ tal que $B(f^i(x),\epsilon)$ está contida em $A_{x,i}$. Então

$$B(x,n,\epsilon) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{x,i}).$$

Então, a hipótese de que E é gerador implica que $\gamma = \{\cap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{x,i}) : x \in E\}$ é uma cobertura de M. Como $\gamma \subset \alpha^n$, segue que $N(\alpha^n) \leq \#E = g_n(f, \epsilon, M)$ para todo n. Portanto,

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} \log N(\alpha^n) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, M)$$

$$\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, M) = g(f, \epsilon, M).$$

Fazendo agora $\epsilon \to 0$, temos que $h(f, \alpha) \leq g(f, M) = g(f)$. Como a cobertura α é arbitrária, segue que $h(f) \leq g(f)$.

Definimos a *entropia topológica* de uma transformação contínua $f : M \to M$ num espaço métrico M como sendo $g(f) = s(f)$. A Proposição 1.2.13 mostra que esta definição é compatível com aquela dada via coberturas abertas. Uma diferença importante é que, enquanto no caso compacto a entropia topológica depende apenas da topologia do espaço (porque $h(f)$ é definida apenas em termos dos abertos), no caso não compacto a entropia topológica pode depender também da função distância em M.

Lembrando que $g(f) = g(f, M)$ e $s(f) = s(f, M)$, a conclusão da Proposição 1.2.13 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$h(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, M) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M).$$

Mas, ainda a partir da demonstração da proposição podemos obter uma outra igualdade relacionada, como é mostrado a seguir.

Corolário 1.2.14. *Se $f : M \to M$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto então*

$$h(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, M) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M).$$

Da demonstração da proposição anterior, sabemos que

$$h(f, \alpha) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, M)$$

sempre que $\epsilon > 0$ é um número de Lebesgue para a cobertura α. Fazendo $\epsilon \to 0$ e usando o Lema 1.2.11, concluímos que

$$h(f) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, M) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M)$$

Além do mais, é verdade que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \epsilon, M) = h(f).$$

Logo, segue o resultado.

1.2.3 Cálculo e Propriedades

As próximas proposições simplificam substancialmente o cálculo da entropia topológica em exemplos concretos. Quando M for um espaço métrico, chamamos *diâmetro* de uma cobertura aberta ao supremo dos diâmetros dos seus elementos.

Proposição 1.2.15. *Suponha que M é um espaço métrico compacto. Seja $(\beta_k)_k$ qualquer sequência de coberturas abertas de M tal que* diam β_k *converge pra zero. Então,*

$$h(f) = \sup_k h(f, \beta_k) = \lim_k h(f, \beta_k).$$

Dada qualquer cobertura aberta α, seja $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue de α. Tome $n \geq 1$ tal que diam $\beta_k < \epsilon$ para todo $k \geq n$. Pela definição de número de Lebesgue, segue que todo elemento de β_k está contido em algum elemento de α. Ou seja, $\alpha \prec \beta_k$ e, portanto, $h(f, \beta_k) \geq h(f, \alpha)$. Pela definição (1.4), isto prova que

$$\liminf_k h(f, \beta_k) \geq h(f).$$

Também é verdade das definições que $h(f) \geq \sup_k h(f, \beta_k) \geq \limsup_k h(f, \beta_k)$. Combinando essas duas desigualdades, obtemos a conclusão da proposição.

Lema 1.2.16. *Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua, então:*

i) *$h(f,\alpha) = h(f,\alpha^k)$ para toda cobertura aberta α e para todo $k \geq 1$.*

ii) *Se f é uma homeomorfismo então $h(f,\alpha) = h(f,\alpha^{\pm k})$ para todo $k \geq 1$, onde $\alpha^{\pm k} = \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\alpha)$.*

(i): $H((\alpha^k)^n) = H(\alpha^{n+k}) \leq H(\alpha^k) + H(\alpha^n)$. Por outro lado, como $\alpha^n \prec \alpha^{n+k}$ para todo $n \geq 1$, temos que $H(\alpha^n) \leq H(\alpha^{n+k})$. Portanto,

$$\frac{1}{n}H(\alpha^n) \leq \frac{1}{n}H((\alpha^k)^n) \leq \frac{1}{n}H(\alpha^k) + \frac{1}{n}H(\alpha^n).$$

Tomando o limite $n \to \infty$, segue que $h(f,\alpha) = h(f,\alpha^k)$, para toda cobertura aberta α e todo $k \geq 1$.

(ii): Sabemos que $H((f^{-1}(\alpha))^n) = H(f^{-1}(\alpha^n)) = H(\alpha^n)$, uma vez que f é um homeomorfismo. Dessa forma, temos que $h(f,\alpha) = h(f,f^{-1}(\alpha))$ para toda cobertura aberta α e todo $n \geq 1$. Pela definição, vale que $\alpha^{\pm k} = f^{-k}(\alpha^{2k})$. Portanto, usando o item anterior, temos que

$$h(f,\alpha^{\pm k}) = h(f, f^{-k}(\alpha^{2k})) = h(f,\alpha^{2k}) = h(f,\alpha)$$

para todo $k \geq 1$.

Corolário 1.2.17. *Suponha M um espaço métrico compacto. Se β é cobertura aberta tal que*

(1) o diâmetro de $\beta^k = \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\beta)$ converge pra zero quando $k \to \infty$, ou

(2) $f : M \to M$ é um homeomorfismo e o diâmetro de $\beta^{\pm k} = \bigvee_{j=0}^{k-1} f^{-j}(\beta)$ converge para zero quando $k \to \infty$, então

$$h(f) = h(f, \beta).$$

No caso (1), pela Proposição 1.2.15 e pelo Lema 1.2.16, temos que:

$$h(f) = \lim_k h(f, \beta^k) = h(f, \beta).$$

No caso (2), de forma análoga, temos:

$$h(f) = \lim_k h(f, \beta^{-k}) = h(f, \beta).$$

A seguir iremos investigar como a entropia topológica se comporta quando a transformação é uniformemente contínua.

Proposição 1.2.18. *Se $f : M \to M$ é uma transformação uniformemente contínua num espaço métrico, então $h(f^k) = k.h(f)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Fixe $k \geq 1$ e seja $K \subset M$ um conjunto compacto qualquer. Considere quaisquer $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$. Se um conjunto $E \subset M$ é (nk, ϵ)-gerador de K para a transformação f então ele também é (n, ϵ)-gerador de K para o iterado f^k. Portanto, $g_n(f^k, \epsilon, K) \leq g_{nk}(f, \epsilon, K)$. Logo,

$$\begin{aligned} g(f^k, \epsilon, K) = \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f^k, \epsilon, K) &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log g_{nk}(f, \epsilon, K) \\ &= g(f, \epsilon, K) \leq k.g(f, \epsilon, K). \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e tomando o supremo sobre K, obtemos que $h(f^k) \leq k.h(f)$. A outra desigualdade usa a hipótese de que f é uniformemente contínua. Tome $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon$ para todo $j = 0, 1, ..., k-1$. Se $E \subset M$ é (n, δ)-gerador de K para f^k então E é (nk, ϵ)-gerador de K para f. Portanto, $g_{nk}(f, \epsilon, K) \leq g_n(f^k, \delta, K)$. Isso implica que $k.g(f, \epsilon, K) \leq g(f^k, \delta, K)$. Fazendo δ e ϵ irem para zero, obtemos que $k.g_(f, K) \leq g(f^k, K)$ para todo compacto K. Logo, $k.h(f) \leq h(f^k)$.

Em particular, a Proposição 1.2.18 vale para toda transformação contínua num espaço métrico compacto. No caso de homeomorfismos em espaços compactos, a conclusão se estende aos iterados negativos, como mostrado a seguir.

Proposição 1.2.19. *Se M é espaço métrico compacto e $f : M \to M$ é um homeomorfismo então $h(f^{-1}) = h(f)$. Consequentemente, $h(f^n) = |n|h(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Seja α uma cobertura aberta de M. Para todo $n \geq 1$, denotemos

$$\alpha_+^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee ... \vee f^{-n+1}(\alpha) \text{ e } \alpha_-^n = \alpha \vee f(\alpha) \vee ... \vee f^{n-1}(\alpha).$$

Observe que $\alpha_-^n = f^{n-1}(\alpha_+^n)$. Mais ainda, γ é uma subcobertura finita de α_+^n se, e somente se, $f^{n-1}(\gamma)$ é uma subcobertura finita de α_-^n. Como as duas subcoberturas tem a mesma cardinalidade, segue que $N(\alpha_+^n) = N(\alpha_-^n)$. Portanto,

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} N(\alpha_+^n) = \lim_n \frac{1}{n} N(\alpha_-^n) = h(f^{-1}, \alpha).$$

Como α é arbitrária, isto mostra que $h(f) = h(f^{-1})$. A segunda parte do enunciado segue usando este fato e a Proposição 1.2.18.

Exemplo 1.2.20 (Homeomorfismo no Círculo)

Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo qualquer e seja α uma cobertura do círculo formada por um número finito de intervalos abertos (S^1 é compacto). Seja $\partial\alpha$ o conjunto formado pelos pontos extremos desses intervalos. Para todo $n \geq 1$, a cobertura α^n está formada por intervalos, cujos pontos extremos estão em

$$\partial\alpha^n = \partial\alpha \cup f^{-1}(\partial\alpha) \cup ... \cup f^{-n+1}(\partial\alpha).$$

Observe que $\#\alpha^n \leq \#\partial\alpha^n \leq n\#\partial\alpha$. Com isso,

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log \#\alpha^n \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log n = 0.$$

Pela Proposição 1.2.15, $h(f) = \lim_k h(f, \alpha_k)$ para qualquer sequência de coberturas abertas α_k com diam $\alpha_k \to 0$. Então, considerando acima coberturas abertas por intervalos de comprimento menor que $1/k$, concluímos que $h(f) = 0$ para todo homeomorfismo do círculo.

1.3 Pressão

Introduziremos agora uma generalização importante do conceito de entropia topológica, que é denominada *pressão*.

1.3.1 Definição via Coberturas Abertas

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto M. Chamamos de *potencial* em M a qualquer função contínua $\phi : M \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\phi_n : M \to \mathbb{R}$ por $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i$. Além disso, dado qualquer conjunto não vazio $C \subset M$, denotamos

$$\phi_n(C) = \sup\{\phi_n(x) : x \in C\}. \tag{1.12}$$

Dada uma cobertura aberta α de M, definimos para todo $n \geq 1$

$$P_n(f, \phi, \alpha) = \inf\{\sum_{U \in \gamma} e^{\phi_n(U)} : \gamma \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n\}. \tag{1.13}$$

o logaritmo de P_n é uma sequência subaditiva. De fato, dada uma subcobertura finita γ de α^{m+n}, temos que

$$\sum_{U \in \gamma} e^{\phi_{m+n}(U)} \leq \sum_{U \in \gamma} e^{\phi_m(U)} e^{\phi_n(f^m(U))} \leq \sum_{U \in \gamma} e^{\phi_m(U)} \sum_{V \in f^m(\gamma)} e^{\phi_n(V)}.$$

Passando o ínfimo, temos que $P_{n+m}(f, \phi, \alpha) \leq P_m(f, \phi, \alpha) P_n(f, \phi, \alpha)$, e tomando o logaritmo segue que $\log P_{m+n} \leq \log P_m + \log P_n$. Portanto, usando o lema 1.2.5 (Fekètè), o limite

$$P(f, \phi, \alpha) := \lim_n \frac{1}{n} \log P_n(f, \phi, \alpha) \tag{1.14}$$

existe.

Por fim, chamamos *pressão* do potencial ϕ relativamente a f ao limite $P(f, \phi)$ de $P(f, \phi, \alpha)$ quando o diâmetro de α vai para zero. A existência desse limite é garantida pelo próximo lema.

Lema 1.3.1 Existe $\lim_{\text{diam } \alpha \to 0} P(f, \phi, \alpha)$, ou seja, existe $P(f, \phi) \in [0, \infty]$ tal que

$$\lim_k P(f, \phi, \alpha_k) = P(f, \phi)$$

para toda sequência $(\alpha_k)_k$ de coberturas abertas com diam $\alpha_k \to 0$.

Sejam $(\alpha_k)_k$ e $(\beta_k)_k$ sequências quaisquer de coberturas abertas com diâmetros convergindo para zero. Dado qualquer $\epsilon > 0$ fixe $\delta > 0$ tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \epsilon$ sempre que $d(x, y) \leq \delta$. Por hipótese, diam $\alpha_k < \delta$ para todo k suficientemente grande. Para k fixado, seja $\rho > 0$ um número de Lebesgue para α_k. Por hipótese, diam $\beta_l < \rho$ para todo l suficientemente grande. Pela definição de número de Lebesgue, todo $B \in \beta_l$ está contido em algum $A \in \alpha_k$. Observe que $\phi_n(A) \leq n\epsilon + \phi_n(B)$ para todo $n \geq 1$, uma vez que $B \in A$ e diam $\alpha_k < \delta$. Isto implica que

$$P_n(f, \phi, \alpha_k) \leq e^{n\epsilon} P_n(f, \phi, \beta_l) \text{ para todo } n \geq 1$$

e portanto, $P(f, \phi, \alpha_k) \leq \epsilon + P(f, \phi, \beta_l)$. Tomando $l \to \infty$ e depois $k \to \infty$, obtemos que

$$\limsup_k P(f, \phi, \alpha_k) \leq \epsilon + \liminf_l P(f, \phi, \beta_l).$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $\limsup_k P(f, \phi, \alpha_k) \leq \liminf_l P(f, \phi, \beta_l)$. Permutando os papéis das duas sequências de coberturas, concluímos que os limites $\lim_k P(f, \phi, \alpha_k)$ e $\lim_l P(f, \phi, \beta_l)$ existem e são iguais.

A seguir, faremos algumas observações importantes das definições. Primeiramente, note que a pressão do potencial nulo tem o mesmo valor da entropia topológica. De fato, de 1.13 temos que $P_n(f, 0, \alpha) = N(\alpha^n)$ para todo $n \geq 1$ e portanto, $P(f, 0, \alpha) = h(f, \alpha)$ para toda cobertura aberta α. Logo,

$$P(f, 0) = h(f).$$

Dada qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, temos $P_n(f, \phi + c, \alpha) = e^{cn} P_n(f, \phi, \alpha)$ para todo $n \geq 1$ e, portanto, $P(f, \phi + c, \alpha) = P(f, \phi, \alpha) + c$ para toda cobertura aberta α. Logo,

$$P(f, \phi + c) = P(f, \phi) + c. \tag{1.15}$$

Se $\phi \leq \psi$, $\phi_n(C) \leq \psi_n(C)$ para qualquer conjunto não vazio $C \subset M$. Com isso, temos $P_n(f, \phi, \alpha) \leq P_n(f, \psi, \alpha)$ para todo $n \geq 1$ e, portanto, $P(f, \phi, \alpha) \leq P(f, \psi, \alpha)$ para toda cobertura aberta α. Ou seja,

$$\phi \leq \psi \Rightarrow P(f, \phi) \leq P(f, \psi). \tag{1.16}$$

Em particular, como $\inf \phi \leq \phi \leq \sup \phi$, temos

$$h(f) + \inf \phi \leq P(f, \phi) \leq h(f) + \sup \phi \tag{1.17}$$

para todo potencial ϕ.

Uma outra consequência interessante da definição é que a pressão é um invariante de equivalência topológica:

Proposição 1.3.2 Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaços métricos compactos. Se existe um homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$ então $P(g, \phi) = P(f, \phi \circ h)$ para todo potencial ϕ em N.

Observe que $(\phi \circ h)(f^j(x)) = \phi(g^j(h(x)))$ para todo $j \geq 1$ e que

$$(\phi \circ h)_n(C) = \sup\{(\phi \circ h)_n(x) : x \in C \subset M\} =$$

$$\sup\{\phi_n(y) : y \in h(C) \subset N\} = \phi_n(h(C)).$$

Dessa forma, obtemos $P_n(f, \phi \circ h, \alpha) = P_n(g, \phi, \alpha)$ para todo $n \geq 1$ e portanto, $P(f, \phi \circ h, \alpha) = P(g, \phi, \alpha)$ para toda cobertura aberta α. Logo, fazendo o diâmetro de α ir pra zero, temos que $P(f, \phi \circ h) = P(g, \phi)$.

1.3.2 Definição por Conjuntos Geradores e Conjuntos Separados

Nesta seção vamos apresentar duas definições alternativas da pressão em termos de conjuntos geradores e conjuntos separados. Como feito anteriormente, $f : M \to M$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto e $\phi : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Dados $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$, defina

$$G_n(f,\phi,\epsilon) = \inf\{\sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)} : \ E \text{ é conjunto } (n,\epsilon)\text{-gerador de } M\}$$

$$S_n(f,\phi,\epsilon) = \sup\{\sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)} : \ E \text{ é conjunto } (n,\epsilon)\text{-separado em } M\}.$$

A seguir, defina

$$G(f,\phi,\epsilon) = \limsup_n \frac{1}{n}\log G_n(f,\phi,\epsilon)$$

$$S(f,\phi,\epsilon) = \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\phi,\epsilon).$$

Além disso,

$$G(f,\phi) = \lim_{\epsilon\to 0} G(f,\phi,\epsilon) \text{ e } S(f,\phi) = \lim_{\epsilon\to 0} S(f,\phi,\epsilon).$$

Esses dois últimos limites existem porque as funções são monótonas em relação a ϵ.

Observe que $G_n(f,0,\epsilon) = g_n(f,\epsilon,M)$ e $S_n(f,0,\epsilon) = s_n(f,\epsilon,M)$ para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon > 0$. Pela Proposição 1.2.6 temos que $G(f,0) = g(f) = h(f)$ e $S(f,0) = s(f) = h(f)$, onde $h(f)$ é a entropia topológica. No caso geral, temos:

Proposição 1.3.3. *$P(f,\phi) = G(f,\phi) = S(f,\phi)$ para todo potencial ϕ em M.*

Seja $n \geq 1$ e $\epsilon > 0$. Das definições, todo conjunto (n,ϵ)-separado maximal é (n,ϵ)-gerador. Então,

$$S_n(f,\phi,\epsilon) = \sup\{\sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)} : \ E \text{ é conjunto } (n,\epsilon)\text{-separado}\}$$

$$= \sup\{\sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)} : \ E \text{ é conjunto } (n,\epsilon)\text{-separado maximal}\}$$

$$\geq \inf\{\sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)} : \ E \text{ é conjunto } (n,\epsilon)\text{-gerador}\} = G_n(f,\phi,\epsilon).$$

Isso implica que $G(f,\phi,\epsilon) \leq S(f,\phi,\epsilon)$. Tomando o limite $\epsilon \to 0$, obtemos $G(f,\phi) \leq S(f,\phi)$.

Agora vamos provar que $S(f,\phi) \leq P(f,\phi)$. Sejam $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que $d(x,y) \leq \delta$ implica $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \epsilon$. Seja α qualquer cobertura aberta de M com diam $\alpha < \delta$. Seja $E \subset M$ qualquer conjunto (n,ϵ)-separado. Dada qualquer subcobertura γ de α^n, todo ponto de E está contido em algum elemento de γ. Por outro lado, a hipótese de que E é (n,ϵ)-separado implica que cada elemento de γ contém no máximo um elemento de E. Portanto,

$$\sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)} \leq \sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)}.$$

Tomando o supremo em E e o ínfimo em γ, obtemos que

$$S_n(f,\phi,\delta) \leq P_n(f,\phi,\alpha).$$

E segue que $S(f,\phi,\delta) \leq P(f,\phi,\alpha)$. Fazendo $\delta \to 0$ (logo diam $\alpha \to 0$), concluímos que $S(f,\phi) \leq P(f,\phi)$, como afirmado.

Por fim, provaremos que $P(f,\phi) \leq G(f,\phi)$. Sejam ϵ e δ números positivos tais que $d(x,y) \leq \delta$ implica $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \epsilon$. Seja α qualquer cobertura aberta de M com diam $\alpha < \delta$. Seja $\rho > 0$ um número de Lebesgue de α e seja $E \subset M$ um conjunto (n,ρ)-gerador qualquer de M. Para cada $x \in E$ e $i = 0, 1, ..., n-1$, existe $A_{x,i} \in \alpha$ tal que $B(f^i(x),\rho)$ está contida $A_{x,i}$. Denotamos,

$$\gamma(x) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{x,i}).$$

Note que $\gamma(x) \in \alpha^n$ e que $B(x,n,\rho) \subset \gamma(x)$. Logo, a hipótese de que E é (n,ρ)-gerador implica que $\gamma = \{\gamma(x) : x \in E\}$ é uma subcobertura de α.

Observe também que

$$\phi_n(\gamma(x)) \leq n\epsilon + \phi_n(x) \text{ para todo } x \in E,$$

Uma vez que diam $A_{x,i} < \delta$ para todo i. Segue que

$$\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)} \leq e^{n\epsilon} \sum_{x\in E} e^{\phi_n(x)}.$$

Isso mostra que $P_n(f,\phi,\alpha) \leq e^{n\epsilon} G_n(f,\phi,\rho)$ para todo $n \geq 1$ e, com isso

$$P(f,\phi,\alpha) \leq \epsilon + \liminf_n \frac{1}{n} G_n(f,\phi,\rho) \leq \epsilon + G(f,\phi,\rho).$$

Fazendo $\rho \to 0$ vem que $P(f,\phi,\alpha) \leq \epsilon + G(f,\phi)$. Então, fazendo ϵ, δ e diam α ir pra zero, obtemos $P(f,\phi) \leq G(f,\phi)$.

1.3.3 Propriedades

Nesta seção vamos generalizar para pressão alguns resultados já obtidos para entropia topológica.

Lema 1.3.4. $P(f,\phi,\alpha^k) = P(f,\phi,\alpha)$ para toda cobertura α e todo $k \geq 1$.

Por definição, para todo $n \geq 1$, temos:

$$P_n(f,\phi,\alpha^k) = \inf\{\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)} : \gamma \text{ subcobertura finita de } (\alpha^k)^n\} \text{ e}$$

$$P_{n+k}(f,\phi,\alpha) = \inf\{\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_{n+k}(U)} : \gamma \text{ subcobertura finita de } \alpha^{n+k}\}.$$

Sabemos que $(\alpha^k)^n = \alpha^{n+k}$. Então, denotando $L = \sup|\phi|$,

$$e^{-kL} P_n(f,\phi,\alpha^k) \leq P_{n+k}(f,\phi,\alpha) \leq e^{kL} P_n(f,\phi,\alpha^k)$$

para todo $n \geq 1$. Passando o logaritmo, dividindo por $n+k$ e tomando $n \to \infty$, obtemos que $P(f,\phi,\alpha^k) = P(f,\phi,\alpha)$.

Lema 1.3.5. *Se f é um homeomorfismo então $P(f,\phi,f^{-1}(\alpha)) = P(f,\phi,\alpha)$ para toda cobertura aberta α.*

Por definição, dado qualquer $n \geq 1$,

$$P_n(f,\phi,\alpha) = \inf\{\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)} : \gamma \text{ subcobertura finita de } \alpha^n\} \text{ e}$$

$$P_n(f,\phi,f^{-1}(\alpha)) = \inf\{\sum_{V\in\delta} e^{\phi_n(V)} : \delta \text{ subcobertura finita de } (f^{-1}(\alpha))^n\}.$$

Seja $L = \sup|\phi|$. Observe que $(f^{-1}(\alpha))^n = f^{-1}(\alpha^n)$ e toda subcobertura finita de $f^{-1}(\alpha^n)$ tem a forma $f^{-1}(\gamma)$ para alguma subcobertura finita γ de α^n. Além do mais,

$$\phi_n(U) - 2L \leq \phi_n(f^{-1}(U)) \leq \phi_n(U) + 2L$$

para qualquer $U \subset M$. Disso, segue que

$$e^{-2L}P_n(f,\phi,\alpha) \leq P_n(f,\phi,f^{-1}(\alpha)) \leq e^{2L}P_n(f,\phi,\alpha)$$

para todo $n \geq 1$. Passando o logaritmo, dividindo por n e tomando $n \to \infty$, obtemos $P(f,\phi,f^{-1}(\alpha)) = P(f,\phi,\alpha)$.

Proposição 1.3.6 *Seja $f : M \to M$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto. Seja β uma cobertura aberta de M tal que*

(1) diam β^k *converge para zero quando $k \to \infty$, ou*

(2) $f : M \to M$ é um homeomorfismo e diam $\beta^{\pm k} \to 0$ *quando $k \to \infty$.*

Então $P(f,\phi) = P(f,\phi,\beta)$ para todo potencial ϕ em M.

(1): Usando os Lemas 1.3.1 e 1.3.4, temos que $P(f,\phi) = \lim_k P(f,\phi,\beta^k) = P(f,\phi,\beta)$.

(2): Por definição, $\alpha^{\pm k} = f^{-k}(\alpha^{2k})$. Disso, segue que $P(f,\phi,\alpha^{\pm k}) = P(f,\phi,\alpha)$ para toda cobertura aberta α e todo $k \geq 1$. Agora, usando mais uma vez o Lema 1.3.4, temos que

$$P(f,\phi) = \lim_k P(f,\phi,\beta^{\pm k}) = P(f,\phi,\beta).$$

Proposição 1.3.7 *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto e seja ϕ um potencial em M. Então:*

(1) $P(f^k,\phi_k) = kP(f,\phi)$ para todo $k \geq 1$.

(2) Se f é um homeomorfismo então $P(f^{-1},\phi) = P(f,\phi)$.

(1): Seja α uma cobertura aberta qualquer de M e seja $\beta = \alpha^k$. Dado um potencial ϕ em M, denote $\psi = \phi_n$. Observe que $\beta^n = \alpha^{kn}$ para cada n e que $\psi_n = \phi_{kn}$, onde $\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i$. Então,

$$P_n(f^k,\psi,\beta) = \inf\{\sum_{U\in\gamma} e^{\psi_n(U)} : \gamma \subset \beta^n\}$$
$$= \inf\{\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_{kn}(U)} : \gamma \subset \alpha^{kn}\} = P_{kn}(f,\phi,\alpha).$$

Consequentemente, $P(f^k,\psi,\beta) = kP(f,\psi,\alpha)$ qualquer que seja α. Fazendo diam $\alpha \to 0$ também implica diam $\beta \to 0$ e obtemos $P(f^k,\psi) = kP(f,\phi)$.

(2): Seja α uma cobertura aberta de M. Para todo $n \geq 1$, denote

$$\alpha_-^n = \alpha \vee f(\alpha) \vee ... \vee f^{n-1}(\alpha) \text{ e } \phi_n^- = \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^{-j}.$$

Note que $\alpha_-^n = f^{n-1}(\alpha^n)$ e que γ é subcobertura finita de α^n se, e somente se, $\delta = f^{n-1}(\gamma)$ é uma subcobertura finita de α_-^n. Além disso, $\phi_n(U) = \phi_n^-(f^{n-1}(U))$, qualquer que seja

$U \subset M$. A partir desses fatos, temos que

$$P_n(f,\phi,\alpha) = \inf\{\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)} : \gamma \text{ subcobertura finita de } \alpha^n\}$$
$$= \inf\{\sum_{V\in\delta} e^{\phi_n^-(V)} : \delta \text{ subcobertura finita de } \alpha_-^n\} = P_n(f^{-1},\phi,\alpha)$$

para todo $n \geq 1$. Então $P(f,\phi,\alpha) = P(f^{-1},\phi,\alpha)$ e tomando diam $\alpha \to 0$, vem que $P(f,\phi) = P(f^{-1},\phi)$.

No que será tratado a seguir fixamos a transformação $f : M \to M$ e consideramos $P(f,\cdot)$ como função no espaço das funções contínuas de M em $\mathbb{R}$, aqui chamado de $C^0(M,\mathbb{R})$. Munimos esse espaço com a norma do supremo

$$||\phi|| = \sup\{|\phi(x)| : x \in M\}.$$

Vimos pela relação (1.17) que se a entropia topológica $h(f)$ é infinita então a pressão é identicamente igual a ∞. A seguir estamos considerando $h(f)$ finita e portanto, $P(f,\phi)$ é finita para todo potencial.

Proposição 1.3.8. *A função pressão é Lipschitz, com constante de Lipschitz igual a 1:* $|P(f,\phi) - P(f,\psi)| \leq ||\phi - \psi||$. *para quaisquer potenciais* ϕ *e* ψ.

É verdade que $\phi \leq \psi + ||\phi - \psi||$. Logo, por (1.15) e (1.16), temos que $P(f,\phi) \leq P(f,\psi) + ||\phi - \psi||$. Trocando os papéis de ϕ e ψ chegamos na outra desigualdade.

Proposição 1.3.9. *A função pressão é convexa:*

$$P(f,(1-t)\phi + t\psi) \leq (1-t)P(f,\phi) + tP(f,\psi)$$

para quaisquer potenciais ϕ e ψ em M e para todo $0 \leq t \leq 1$.

Escreva $\xi = (1-t)\phi + t\psi$. Então $\xi_n = (1-t)\phi_n + t\psi_n$ para todo $n \geq 1$ e portanto, $\xi_n(U) \leq (1-t)\phi_n(U) + t\psi_n(U)$ para todo $U \subset M$. Usando a desigualdade de Holder,

$$\sum_{U\in\gamma} e^{\xi_n(U)} \leq \left(\sum_{U\in\gamma} e^{\phi_n(U)}\right)^{1-t} \left(\sum_{U\in\gamma} e^{\psi_n(U)}\right)^{t}$$

para qualquer família finita γ de subconjuntos de M. Isto implica que, dada qualquer cobertura aberta α,

$$P_n(f,\xi,\alpha) \leq P_n(f,\phi,\alpha)^{1-t} P_n(f,\psi,\alpha)^t$$

para todo $n \geq 1$ e portanto, $P(f,\xi,\alpha) \leq (1-t)P(f,\phi,\alpha)+tP(f,\psi,\alpha)$. Fazendo diam $\alpha \to 0$, obtemos o resultado desejado.

Definição 1.3.10 *Dizemos que dois potenciais $\phi, \psi : M \to \mathbb{R}$ são cohomólogos se existe alguma função contínua $u : M \to \mathbb{R}$ tal que $\phi = \psi + u \circ f - u$.*

Proposição 1.3.11. *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço topológico compacto. Se $\phi, \psi : M \to \mathbb{R}$ são potenciais cohomólogos então $P(f,\phi) = P(f,\psi)$.*

Se $\psi = \phi + u \circ f - u$ então $\psi_n(x) = \phi_n(x) + u(f^n(x)) - u(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $K = \sup|u|$. Então $|\psi_n(C) - \phi_n(C)| \leq 2K$ para todo conjunto $C \subset M$. Portanto, para qualquer cobertura aberta γ,

$$e^{-2K} \sum_{U \in \gamma} e^{\phi_n(U)} \leq \sum_{U \in \gamma} e^{\psi_n(U)} \leq e^{2K} \sum_{U \in \gamma} e^{\phi_n(U)}.$$

Isso implica que dada qualquer cobertura aberta α de M,

$$e^{-2K} P_n(f,\phi,\alpha) \leq P_n(f,\psi,\alpha) \leq e^{2K} P_n(f,\phi,\alpha)$$

para todo $n \geq 1$. Logo, $P(f,\phi,\alpha) = P(f,\psi,\alpha)$ para toda cobertura α e, consequentemente, $P(f,\phi) = P(f,\psi)$.

1.4 Princípio Variacional e Estados de Equilíbrio

O princípio variacional que enunciaremos a seguir, foi provado originalmente pelo físco-matemático David Ruelle ([Rue69]), sendo depois estendido por Walters ([Wal75]) para o contexto aqui apresentado.

Teorema 1.4.1 (Princípio Variacional). *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto e seja $\mathcal{M}(f)$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes por f. Então, para toda função contínua $\phi : M \to \mathbb{R}$,*

$$P(f, \phi) = \sup\{h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu : \nu \in \mathcal{M}(f)\}.$$

Em particular, segue que f tem entropia topológica nula se, e somente se, $h_\nu(f) = 0$ para toda probabilidade invariante ν.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [OV15]. A seguir será mostrada um corolário interessante do princípio variacional.

Corolário 1.4.2 (Walters). *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto, com entropia topológica $h(f) < \infty$. Seja η uma medida com sinal finita em M. Então η é uma probabilidade invariante por f se, e somente se, $\int \phi \, d\eta \leq P(f, \phi)$ para toda função contínua $\phi : M \to \mathbb{R}$.*

Diretamente do teorema, se η é uma probabilidade invariante por f, temos que

$$P(f, \phi) \geq h_\eta(f) + \int \phi \, d\eta \geq \int \phi \, d\eta$$

para toda função contínua ϕ. Reciprocamente, Seja η uma medida finita com sinal tal que $\int \phi \, d\eta \leq P(f, \phi)$ para toda ϕ. Considere qualquer $\phi \geq 0$. Para quaisquer $c > 0$ e $\epsilon > 0$,

$$c \int (\phi + \epsilon) \, d\eta = -\int -c(\phi + \epsilon) \, d\eta \geq -P(f, -c(\phi + \epsilon)).$$

Pela relação (1.17), temos que

$$P(f, -c(\phi + \epsilon)) \leq h(f) + \sup(-c(\phi + \epsilon)) = h(f) - c \inf(\phi + \epsilon).$$

Portanto, $c \int (\phi + \epsilon) \, d\eta \geq -h(f) + c \inf(\phi + \epsilon)$. Quando $c > 0$ é suficientemente grande o lado direito desta desigualdade é positivo. Logo $\int (\phi + \epsilon) \, d\eta > 0$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, isto implica que $\int \phi \, d\eta \geq 0$ para todo potencial $\phi \geq 0$. Logo, η é uma medida positiva. O próximo passo é mostrar que η é uma probabilidade, ou seja, $\eta(M) = 1$. Por hipótese,

$$\int c\,d\eta \leq P(f,c) = h(f) + c$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Para $c > 0$ isto implica que $\eta(M) \leq 1 + \frac{h(f)}{c}$. Passando o limite quando $c \to +\infty$ obtemos que $\eta(M) \leq 1$. De forma análoga, considerando $c < 0$ e passando o limite quando $c \to -\infty$, vem que $\eta(M) \geq 1$. Portanto, η é uma probabilidade, como afirmado. Resta provar que η é invariante por f. Por hipótese, dado $c \in \mathbb{R}$ e qualquer potencial ϕ,

$$c\int(\phi \circ f - \phi)\,d\eta \leq P(f, c(\phi \circ f - \phi)).$$

Pela Proposição 1.3.11, a expressão no lado direito é igual a $P(f,0) = h(f)$. Para $c > 0$, isto implica

$$\int(\phi \circ f - \phi)\,d\eta \leq \frac{h(f)}{c}$$

e passando o limite quando $c \to +\infty$, seque que $\int(\phi \circ f - \phi)\,d\eta \leq 0$. O mesmo argumento aplicado a $-\phi$ dá que $\int(\phi \circ f - \phi)\,d\eta \geq 0$. Logo, $\int \phi \circ f\,d\eta = \int \phi\,d\eta$ para todo potencial ϕ. Segue que η preserva medida.

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Uma medida invariante de probabilidade μ é dita um *estado de equilíbrio* para um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$, se ela realiza o supremo no princípio variacional, ou seja, se

$$h_\mu(f) + \int \phi\,d\mu = P(f,\phi) = \sup\{h_\nu(f) + \int \phi\,d\nu : \nu \in \mathcal{M}(f)\}.$$

No caso particular de $\phi = 0$ também dizemos que μ é uma *medida de máxima entropia.*

Exemplo 1.4.3. Se $f : M \to M$ tem entropia topológica nula, toda probabilidade invariante μ é medida de máxima entropia, já que $h_\mu(f) = 0 = h(f)$. Para um potencial qualquer $\phi : M \to \mathbb{R}$,

$$P(f,\phi) = \sup\{\int \phi\,d\nu : \nu \in \mathcal{M}(f)\}.$$

Portanto, ν é estado de equilíbrio se, e somente se, ν maximiza a integral de ϕ.

Com esta seção, concluímos nesse trabalho a primeira parte referente à conceitos básicos de formalismo termodinâmico tratado em teoria ergódica. No restante do texto, alguns resultados daqui serão usados no estudo formal de mecânica estatística ou dinâmica simbólica.

2 Estados de Gibbs

Para efeitos de modelagem matemática, é conveniente supor que o conjunto M das unidades que formam um sistema é infinito. Os exemplos mais estudados são os reticulados $\mathbb{Z}^d$. Tais modelos são comumente chamados de *cristais reticulados*. Além disso, é usual supor que cada unidade $x \in M$ admite um conjunto finito de Ω_x de valores possíveis. Por exemplo, $\Omega_x = \{-1, 1\}$ no caso de *sistemas de spin* e $\Omega_x = \{0, 1\}$ no caso de *gases de rede*.

O *espaço de configurações* do sistema é um subconjunto Ω do produto $\prod_{x \in M} \Omega_x$ e um *estado* do sistema é uma medida de probabilidade em Ω. Um *estado de equilíbrio*, nesse caso, descreve uma configuração macroscópica do sistema que pode ser fisicamente observada e uma transição de fases corresponde à coexistência de mais de um estado de equilíbrio.

Pelo *Princípio Variacional* da Mecânica Estatística, que remonta à *lei da mínima ação*, estados de equilíbrio são caracterizados por minimizarem uma certa grandeza fundamental, tal como, a energia livre de Gibbs ou a pressão. Prova-se que sob certas hipóteses adequadas os estados de equilíbrio são medidas de um certo tipo, chamadas *estados de Gibbs*, como pode ser visto em [Bow75].

2.1 Ensemble Microcanônico

Nesta seção será feito um tratamento matemático como introdução para se obter a distribuição de Gibbs. Serão introduzidos os conceitos centrais de mecânica estatística do equilíbrio que serão válidos para sistemas em geral.

No que será desenvolvido a seguir, consideramos um conjunto Ω (inicialmente finito) de microestados do sistema. Além disso, também trabalharemos com o conceito de uma interação entre os constituintes microscópicos ω do sistema, dada na forma de energia $\mathcal{H}(\omega)$. A função assim dada, $\mathcal{H} : \Omega \to \mathbb{R}$, é chamada *Hamiltoniano* do sistema.

Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ o conjunto de distribuições de probabilidade em Ω. Como estamos assumindo Ω finito, qualquer medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ é inteiramente caracterizada pela coleção $(\mu(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ de probabilidades associadas à cada microestado ω. Para simplificar a escrita, usaremos $\mu(\{\omega\}) = \mu(\omega)$. Por definição, $\mu(\omega) \geq 0$ e $\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega) = 1$.

Denotaremos por $\Omega_{N,\Lambda}$ o conjunto de todos os macroestados descrevendo um sistema com N elementos localizados numa região Λ de volume $|\Lambda| = V$. Neste contexto, o volume é igual a cardinalidade. Seja o conjunto $\Omega_{N,\Lambda,U} := \{\omega \in \Omega_{N,\Lambda}; \mathcal{H}(\omega) = U\}$. Como essas são as únicas informações que temos do sistema, é natural assumirmos que todas as configurações $\omega \in \Omega_{N,\Lambda,U}$ são equivalentemente prováveis, ou seja, o sistema tem distribuição uniforme. Com isso podemos definir o seguinte:

Definição 2.1.1. A *distribuição microcanônica ou Ensemble microcanônico* (com energia U), $\nu^{mic}_{N,\Lambda,U}$, associada a um sistema com N partículas localizadas em um volume Λ, é a distribuição de probabilidade uniforme dada por:

$$\nu^{mic}_{N,\Lambda,U}(\omega) = \frac{1}{|\Omega_{N,\Lambda,U}|} \text{ se } \mathcal{H}(\omega) = U \text{ e}$$

$$\nu^{mic}_{N,\Lambda,U}(\omega) = 0 \text{ caso contrário.}$$

Mesmo essa distribuição sendo natural e fácil de definir, pode ser muito complicado trabalhar com configurações em um certo nível de energia fixado devido à problemas de combinatória, mesmo nos casos mais simples.

Baseado nesse problema, o que buscaremos agora é uma distribuição de probabilidade tal que a *esperança* seja um valor fixo U, ou seja, $< \mathcal{H} >_\mu := \sum_{\omega\in\Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega)\mathcal{H}(\omega) = U$.

Uma maneira conveniente de medir a imprevisibilidade de uma distribuição de probabilidade μ é através da entropia métrica, definida na primeira seção do capítulo passado. Adequando aquela definição para este caso onde Ω é um conjunto finito, a entropia pode ser dada por

$$S(\mu) = -\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega)\log\mu(\omega),$$

onde $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e cada $\{\omega\}$ é um elemento de partição. Como toda partição dada pode ser reduzida à reunião dos átomos $\{\omega\}$, esta entropia não depende da partição tomada e pode ser vista apenas como função da medida μ.

Proposição 2.1.2. *A entropia de uma medida $S : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função côncava.*

Sabemos que a função $g(x) = -x\log x$ é côncava, ou seja, para todo x, y e $\alpha \in [0,1]$, temos

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y).$$

Com isso, podemos escrever,

$$S(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu) = \sum_{\omega\in\Omega} -(\alpha\mu(\omega) + (1-\alpha)\nu(\omega))\log(\alpha\mu(\omega) + (1-\alpha)\nu(\omega))$$

$$\geq \sum_{\omega\in\Omega} -\alpha\mu(\omega)\log\mu(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} -(1-\alpha)\nu(\omega)\log\nu(\omega) = \alpha S(\mu) + (1-\alpha)S(\nu).$$

Proposição 2.1.3. *A distribuição uniforme em Ω, $\nu(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, é a única distribuição de probabilidade onde a entropia atinge o seu máximo.*

Considere a função côncava $g(x) = -x\log x$. Usando a desigualdade de Jensen (ver [OV15]), temos que

$$S(\mu) = |\Omega| \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{|\Omega|} g(\mu(\omega)) \leq |\Omega| g\left(\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{|\Omega|}\mu(\omega)\right) = |\Omega| g\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)$$

$$= |\Omega| \frac{1}{|\Omega|} \log |\Omega| = \sum_{\omega \in \Omega} \nu(\omega) \log \nu(\omega) = S(\nu).$$

Como μ é arbitrária, segue que a entropia atinge o máximo em ν. Ainda mais, a igualdade ocorre se, e somente se, μ é constante, isto é, $\mu = \frac{1}{|\Omega|} = \nu$.

De acordo com as duas proposições anteriores, a entropia de uma medida é côncava e atinge seu máximo na distribuição uniforme. Em cima disso, a entropia é um bom parâmetro para medir o quão distante uma medida está de ser uniforme. De fato, pode-se mostrar que a entropia é a única função contínua, a menos de uma constante, que satisfaz essa propriedade. Dessa forma, podemos usar a função entropia para selecionar, entre todas as possíveis distribuições em um determinado conjunto, qual aquela considerada "mais uniforme".

2.2 Distribuição Canônica de Gibbs

Queremos descobrir qual a distribuição de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}(\Omega_{N,\Lambda})$ que maximiza a função S com a restrição de que $< \mathcal{H} >_\mu = U$, onde U é um valor de energia fixado para o sistema. De acordo como o nosso caso, isto é a mesma coisa que encontrar o valor de $\mu(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_{N,\Lambda}$, no seguinte problema:

$$\text{Maximizar } S(\mu) \text{ quando } \sum_{\omega \in \Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega) = 1 \text{ e } \sum_{\omega \in \Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega)\mathcal{H}(\omega) = U.$$

Mas isso é equivalente a

$$\text{Minimizar } \sum_{\omega \in \Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega) \log \mu(\omega) \text{ quando } \sum_{\omega \in \Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega) = 1 \text{ e } \sum_{\omega \in \Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega)\mathcal{H}(\omega) = U.$$

Para este problema possuir solução, $U \in [U_{min}, U_{max}]$, onde $U_{min} = \inf_\omega \mathcal{H}(\omega)$ e $U_{max} = \sup_\omega \mathcal{H}(\omega)$. Problemas deste tipo são resolvidos usando o método de *multiplicadores de Lagrange.*

Uma vez que temos duas restrições, vamos introduzir dois multiplicadores, β e λ, e definir a seguinte função de Lagrange:

$$L(\mu) := \sum_{\omega\in\Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega)\log\mu(\omega) + \lambda \sum_{\omega\in\Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega) + \beta \sum_{\omega\in\Omega_{N,\Lambda}} \mu(\omega)\mathcal{H}(\omega).$$

Derivando L com relação à $\mu(\omega)$, $\omega \in \Omega_{N,\Lambda}$, a relação $\nabla L = 0$ corresponde a

$$\nabla L = \frac{\partial L}{\partial \mu(\omega)} = \log\mu(\omega) + 1 + \lambda + \beta\mathcal{H}(\omega) = 0.$$

$\forall \omega \in \Omega_{N,\Lambda}$. A solução da equação acima é da forma $\mu(\omega) = e^{-\beta\mathcal{H}(\omega)-\lambda-1}$. A primeira restrição implica que $e^{1+\lambda} = \sum_{\omega\in\Omega_{N,\Lambda}} e^{-\beta\mathcal{H}(\omega)}$, ou seja

$$\mu(\omega) = \mu_\beta(\omega) := \frac{e^{-\beta\mathcal{H}(\omega)}}{\sum_{\xi\in\Omega_{N,\Lambda}} e^{-\beta\mathcal{H}(\xi)}}$$

onde o parâmetro β é tal que $\sum_{\omega\in\Omega_{N,\Lambda}} \mu_\beta(\omega)\mathcal{H}(\omega) = U$, satisfazendo assim a segunda restrição.

Uma outra forma de derivar a distribuição de Gibbs é através da introdução da *energia livre de Gibbs* que é definida como:

$$G(\mu) :=< \mathcal{H} >_\mu - \kappa T S(\mu),$$

onde κ é chamada *constante de Boltzmann* e T é uma temperatura absoluta fixada. Nesse caso, maximizar a entropia $S(\mu)$ é o mesmo que minimizar a energia de Gibbs $G(\mu)$.

Resumindo o que foi feito, podemos definir o seguinte:

Definição 2.1.4. *A distribuição canônica de Gibbs com parâmetro β associada a um sistema com N partículas localizadas em um volume Λ é a distribuição de probabilidade em $\Omega_{N,\Lambda}$ definida por*

$$\mu_{N,\Lambda,\beta}(\omega) := \frac{e^{-\beta\mathcal{H}(\omega)}}{Z_{N,\Lambda,\beta}}$$

onde $Z_{N,\Lambda,\beta} := \sum_{\xi\in\Omega_{N,\Lambda}} e^{-\beta\mathcal{H}(\xi)}$ é chamada de função partição canônica

3 O Modelo de Ising

O Modelo de Ising foi introduzido por Wilhelm Lenz em 1920 numa tentativa de se obter uma compreensão de transição de fase em sistemas magnéticos. O nome do modelo é devido à Ernst Ising que o desenvolveu no caso unidimensional juntamente com seu orientador, Lenz, na sua tese de 1925.

No início do século XX havia uma grande discussão em física teórica se era possível descrever o fenômeno de transição de fase usando apenas mecânica estatística, ainda uma teoria muito jovem naquela ocasião. Essa questão foi resolvida justamente com o surgimento do modelo de Ising, onde foi possível descrever e provar a existência de transição de fase em alguns modelos magnéticos. Esta prova foi realizada num famoso artigo de Rudolph Peierls chamado *On Ising?s ferromagnet model* de 1936.

A simplicidade e riqueza do comportamento descrito pelo modelo de Ising o tornou preferido para se testar novas ideias e métodos em mecânica estatística geral. Atualmente é, sem dúvida, o modelo mais famoso da área e tem sido assunto de milhares de artigos de pesquisa. Além disso, através de inúmeras interpretações físicas e de outras áreas correlatas, o modelo tem sido usado para descrever o comportamento qualitativo, e muitas vezes até quantitativo, de uma grande variedade de situações. Como será estudado daqui pra frente, o modelo é desenvolvido para se estudar uma grande quantidade de partículas ou átomos com spin situados num reticulado inteiro, uma aproximação simplificada para modelagem de ferromagnetismo.

3.1 Distribuição de Gibbs para Volume Finito

Nesta seção, vamos definir o modelo de Ising de forma precisa no reticulado $\mathbb{Z}^d$ e estudar algumas de suas propriedades. Isso será feito usando a distribuição de Gibbs que foi estabelecida no capítulo passado.

Volumes Finitos com Condição de Fronteira Livre

Seja $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ um subconjunto de volume finito. Definimos o espaço de configurações como sendo $\Omega_\Lambda := \{-1, 1\}^\Lambda$, ou seja, toda configuração $\omega \in \Omega_\Lambda$ é da forma $\omega = (\omega_i)_{i\in\Lambda}$ com $\omega_i = \pm 1$. A variável aleatória básica associada ao modelo é o *spin* no vértice $i \in \Lambda$ que é dada por $\sigma_i : \Omega_\Lambda \to \{-1, 1\}$, onde $\sigma_i(\omega) = \omega_i$.

Sabemos que o reticulado $\mathbb{Z}^d$ é o conjunto dos pontos, átomos ou vértices $i = (i_1, ..., i_d)$, com cada $i_k \in \mathbb{Z}$. Podemos definir no reticulado uma norma dada por

$$||i|| = \sum_{k=1}^{d} |i_k| \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}^d.$$

Com essa norma, introduzimos uma distância e dizemos que dois vértices i e j são *vizinhos próximos*, e denotamos por $i \approx j$, quando $||i - j|| = 1$. Baseado nisso, definimos o conjunto dos vértices que são vizinhos próximos como sendo $\mathcal{E}_\Lambda := \{\{i, j\} \subset \Lambda; i \approx j\}$.

Para cada configuração $\omega \in \Omega_\Lambda$ associamos a sua *energia com condição de fronteira livre* dada pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) := -\beta \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}_\Lambda} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - h \sum_{i\in\Lambda} \sigma_i(\omega),$$

onde $\beta \in (0, \infty)$ é o inverso da temperatura e $h \in \mathbb{R}$ é o campo magnético. O símbolo $\emptyset$ indica que esse modelo é com fronteira livre, o que significa que spins no interior de Λ não interagem com spins localizados no exterior de Λ.

Definição 3.1.1. *A distribuição de Gibbs do Modelo de Ising em Λ com condição livre de fronteira e parâmetros β e h, é a distribuição em Ω_Λ definida por*

$$\mu^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) = \frac{1}{Z^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}} \exp\left(-\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right),$$

onde

$$Z^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h} := \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} \exp\left(-\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right)$$

é chamada de função partição com condição livre de fronteira em Ω_Λ.

Volume Finito com Condições de Fronteira

Será útil considerar o modelo de Ising em todo o reticulado $\mathbb{Z}^d$ mas com configurações que são fixadas fora de um subconjunto finito Λ.

Vamos considerar então configurações no espaço $\Omega := \{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Fixando um subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e uma configuração $\eta \in \Omega$, definimos o *espaço de configuração em Λ com condição de fronteira η*, o conjunto

$$\Omega^{\eta}_{\Lambda} := \{\omega \in \Omega : \omega_i = \eta_i \forall i \notin \Lambda\}.$$

A energia de uma configuração $\omega \in \Omega^{\eta}_{\Lambda}$ é dada por

$$\mathcal{H}^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) := -\beta \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - h\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i(\omega),$$

onde consideramos $\mathcal{E}^b_\Lambda := \{\{i,j\} \subset \mathbb{Z}^d : \{i,j\}\cap\Lambda \neq \emptyset, i \approx j\}$. Observe que $\mathcal{E}^b_\Lambda$ difere de $\mathcal{E}_\Lambda$ por conter também os vértices localizados fora de Λ e que ainda são vizinhos próximos.

Definição 3.1.2. *A distribuição de Gibbs do Modelo de Ising em Λ com condição de fronteira η e parâmetros β e h, é a distribuição em Ω^{η}_{Λ} definida por*

$$\mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) = \frac{1}{Z^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}} \exp\left(-\mathcal{H}^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right),$$

onde

$$Z^{\eta}_{\Lambda,\beta,h} := \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} \exp\left(-\mathcal{H}^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right)$$

é chamada de função partição com condição de fronteira η*.*

Nesse cenário, duas condições de fronteira tem um papel importante: A condição de fronteira positiva η^+, onde $\eta^+_i := +1$ para todo $i \notin \Lambda$ e a condição de fronteira negativa η^-, onde $\eta^-_i := -1$ para todo $i \notin \Lambda$. As distribuições de Gibbs correspondentes são denotadas por $\mu^+_{\Lambda,\beta,h}$ e $\mu^-_{\Lambda,\beta,h}$. Similarmente também denotaremos os respectivos espaços de configuração por Ω^+_Λ e Ω^-_Λ.

3.2 Limite Termodinâmico

Geralmente, em Mecânica Estatística se estuda sistemas com uma quantidade muito alta de partículas, sítios ou vértices. Além disso, em probabilidade e teoria ergódica é natural aparecerem definições e propriedades utilizando eventos e exemplos infinitos, como a lei dos grandes números e o teorema ergódico. Devido a isso, é conveniente ter alguma noção de distribuição de Gibbs para o modelo de Ising em todo o reticulado $\mathbb{Z}^d$.

A teoria descrevendo medidas de Gibbs em espaços gerais e em reticulados é bem extensa e profunda e existem maneiras diferentes de abordagem. Nesse trabalho, usaremos um procedimento de aproximação de um sistema infinito através de uma sequência crescente de conjuntos. Este tipo de abordagem, fundamental para a descrição de propriedades termodinâmicas e de transição de fase, é conhecido como *limite termodinâmico.*

Para definirmos o Modelo de Ising em todo o reticulado $\mathbb{Z}^d$, o limite termodinâmico será realizado através de sequências de subconjuntos finitos $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$, que *convergem* pra $\mathbb{Z}^d$, denotado por $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, no sentido que

1) Λ_n é crescente: $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$ para todo n.

2) $\bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$.

Além disso, para se ter um controle sobre a forma como os subconjuntos estão crescendo é necessário impor alguma restrição para suas fronteiras, um tipo de regularidade da sequência de subconjuntos. Baseado nisso, dizemos que uma sequência de subconjuntos $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, converge para $\mathbb{Z}^d$ no *sentido de van Hove*, que será denotado por $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$, se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0,$$

onde $\partial\Lambda := \{i \in \Lambda : \exists j \notin \Lambda, i \approx j\}$, ou seja, o conjunto dos pontos da fronteira que ainda pertencem ao subconjunto Λ. A sequência mais simples que satisfaz essa condição é a sequência de *hipercubos* $B(n) := \{-n, ..., n\}^d$.

3.2.1 Pressão

A função partição definida acima tem um importante papel no desenvolvimento da teoria, em particular na definição do conceito de *pressão*.

Definição 3.2.1. *A pressão em $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, com condição de fronteira $\#$, é definida por:*

$$\psi_\Lambda^\#(\beta, h) := \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_{\Lambda,\beta,h}^\#.$$

As duas proposições seguintes nos dão propriedades úteis da pressão em subconjuntos finitos do reticulado.

Proposição 3.2.2. *Para todo $\Lambda, \beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$, vale que:*

i) $\psi_\Lambda^\emptyset(\beta, h) = \psi_\Lambda^\emptyset(\beta, -h)$

ii) $\psi_\Lambda^+(\beta, h) = \psi_\Lambda^-(\beta, -h)$.

i): Usando a expressão da energia podemos escrever que

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\emptyset(\omega) = -\beta \sum_{i\approx j} \sigma_i\sigma_j - h\sum_{i\in\Lambda} \sigma_i = -\beta \sum_{i\approx j}(-\sigma_i)(-\sigma_j) - (-h)\sum_{i\in\Lambda}(-\sigma_i) = \mathcal{H}_{\Lambda,\beta,-h}^\emptyset(-\omega).$$

Disso, segue que

$$\psi_\Lambda^\emptyset(\beta,h)=\frac{1}{|\Lambda|}\log\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda}\exp\left(-\mathcal{H}^\emptyset_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right)=\frac{1}{|\Lambda|}\log\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda}\exp\left(-\mathcal{H}^\emptyset_{\Lambda,\beta,-h}(-\omega)\right)=\psi_\Lambda^\emptyset(\beta,-h).$$

ii): Como no item passado, vamos escrever a expressão da energia:

$$\mathcal{H}^+_{\Lambda,\beta,h}(\omega)=-\beta\sum_{i\approx j;i,j\in\Lambda}\sigma_i\sigma_j-\beta\sum_{i\approx j;i\notin\Lambda,j\in\Lambda}(\sigma_i=+1)\sigma_j-h\sum_{i\in\Lambda}\sigma_i=$$

$$=-\beta\sum_{i\approx j;i,j\in\Lambda}(-\sigma_i)(-\sigma_j)-\beta\sum_{i\approx j;i\notin\Lambda,j\in\Lambda}(\sigma_i=-1)(-\sigma_j)-(-h)\sum_{i\in\Lambda}(-\sigma_i)=\mathcal{H}^-_{\Lambda,\beta,-h}(-\omega).$$

Como na expressão da pressão há o somatório sobre todas as configurações possíveis, segue o resultado da mesma forma como no item anterior. O seguinte lema será útil na demonstração da próxima proposição.

Lema 3.2.3.(Desigualdade de Hölder) *Para todos $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ e todos $p,q>1$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, temos que*

$$\sum_{k=1}^n|x_ky_k|\le\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|y_k|^q\right)^{1/q}$$

Ver [OV15]

Proposição 3.2.4. *Para cada tipo de condição de fronteira #, a aplicação $(\beta,h)\longmapsto\psi_\Lambda^\#(\beta,h)$ é convexa.*

Vamos considerar o caso $\psi_\Lambda^\eta(\beta,h)$. Seja $\alpha\in[0,1]$. Observe que $\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)$ é uma função afim de β e h. Usando o Lema 3.2.3, podemos ver que

$$Z^\eta_{\Lambda;\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2;\alpha h_1+(1-\alpha)h_2}=\sum_{\omega\in\Omega^\eta_\Lambda}e^{-\alpha\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega)-(1-\alpha)\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega)}$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta} e^{-\alpha\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega)} e^{-(1-\alpha)\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega)}$$

$$\leq \left(\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta}\left(e^{-\alpha\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega)}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\left(\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta}\left(e^{-(1-\alpha)\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega)}\right)^{1/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}$$

$$= \left(\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega)}\right)^{\alpha}\left(\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega)}\right)^{1-\alpha}.$$

Ou seja, obtemos que

$$Z^\eta_{\Lambda;\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2;\alpha h_1+(1-\alpha)h_2} \leq \left(Z^\eta_{\Lambda;\beta_1;h_1}\right)^{\alpha}\left(Z^\eta_{\Lambda;\beta_2;h_2}\right)^{1-\alpha}$$

Passsando o logaritmo em ambos os lados e dividindo pelo volume $|\Lambda|$, vemos que

$$\psi^\eta_\Lambda(\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2, \alpha h_1+(1-\alpha)h_2) \leq \alpha\psi^\eta_\Lambda(\beta_1,h_1)+(1-\alpha)\psi^\eta_\Lambda(\beta_2,h_2).$$

Teorema 3.2.5. *No limite termodinâmico, a pressão*

$$\psi(\beta,h) := \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d}\psi^{\#}_\Lambda(\beta,h)$$

é bem definida e independente da sequência de subconjuntos $\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d$ e do tipo de condição de fronteira. Além disso, ψ é convexa e é par em relação ao parâmetro h.

Começaremos a prova mostrando a convergência no caso de condição de fronteira livre. A prova será feita em dois passos. Primeiro vamos mostrar a existência do limite

$$\lim_{n\to\infty}\psi^{\emptyset}_{D_n}(\beta,h)$$

onde $D_n := \{1,2,3,...,2^n\}^d$. Depois disso, vamos estender a existência do limite para qualquer tipo de sequência $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$.

Vamos agora analisar a proximidade entre a pressão associada à caixa D_{n+1} e a associada à D_n. De fato, podemos dividir a caixa D_{n+1} em 2^d sub-caixas disjuntas que são translações de D_n: $D_n^{(1)},...,D_n^{(2^d)}$. Com isso, a energia de D_{n+1} pode ser escrita como:

$$\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_{n+1}} = \sum_{i=1}^{2^d} \mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}} + R_n$$

onde R_n representa a energia de interação entre pares de spins que pertencem a diferentes sub-caixas. Observe que cada face de D_{n+1} contém $(2^{n+1})^{d-1}$. Dessa forma, temos $-\beta d(2^{n+1})^{d-1} \leq R_n(\omega) \leq \beta d(2^{n+1})^{d-1}$. Agora, considerando $\omega^{(i)}$ como configurações restritas a $\Omega_{D_n^{(i)}}$ para todo i, podemos encontrar uma cota superior para a função partição

$$-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_{n+1}}(\omega) \leq \sum_{i=1}^{2^d} -\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}}(\omega^{(i)}) + \beta d 2^{(n+1)(d-1)}$$

$$e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_{n+1}}(\omega)} \leq \prod_{i=1}^{2^d} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}}(\omega^{(i)})} e^{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_{n+1}}(\omega)} \leq \left(\sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} \prod_{i=1}^{2^d} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}}(\omega^{(i)})} \right) e^{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}$$

$$Z^{\emptyset}_{D_{n+1}} \leq e^{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} \sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} \prod_{i=1}^{2^d} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}}(\omega^{(i)})}.$$

Agora dividindo a soma de $\omega \in \Omega_{D_{n+1}}$ para 2^d somas de configurações $\omega^{(i)} \in \Omega_{D_n^{(i)}}$, temos que

$$\sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} \prod_{i=1}^{2^d} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}}(\omega^{(i)})} = \prod_{i=1}^{2^d} \sum_{\omega^{(i)} \in \Omega_{D_n^{(i)}}} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_n^{(i)}}(\omega^{(i)})}$$

$$= \prod_{i=1}^{2^d} Z^{\emptyset}_{D_n^{(i)}} = \prod_{i=1}^{2^d} Z^{\emptyset}_{D_n} = \left(Z^{\emptyset}_{D_n}\right)^{2^d}.$$

Onde estamos usando o fato de que $Z^{\emptyset}_{D_n^{(i)}} = Z^{\emptyset}_{D_n}$ para todo i. De forma análoga, obtém-se uma cota inferior para a função partição e chegamos a

$$e^{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} \left(Z^{\emptyset}_{D_n}\right)^{2^d} \leq Z^{\emptyset}_{D_{n+1}} \leq e^{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} \left(Z^{\emptyset}_{D_n}\right)^{2^d}.$$

Passando o logaritmo e dividindo por $|D_{n+1}|$, temos

$$\frac{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}{|D_{n+1}|} + 2^d \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_n}}{|D_{n+1}|} \leq \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_{n+1}}}{|D_{n+1}|} \leq \frac{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}{|D_{n+1}|} + 2^d \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_n}}{|D_{n+1}|}$$

Como $|D_n| = 2^{dn}$, chegamos a

$$\frac{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}{2^{d(n+1)}} + \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_n}}{|D_n|} \leq \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_{n+1}}}{|D_{n+1}|} \leq \frac{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}{2^{d(n+1)}} + \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_n}}{|D_n|}$$

$$|\psi^{\emptyset}_{D_{n+1}} - \psi^{\emptyset}_{D_n}| \leq \beta d 2^{-(n+1)}.$$

Isso implica que para $m \geq n$

$$|\psi^{\emptyset}_{D_m} - \psi^{\emptyset}_{D_n}| \leq \beta d \sum_{k=n+1}^{m} 2^{-k} = \beta d (2^{-n} - 2^{-m}),$$

ou seja, $\psi^{\emptyset}_{D_n}$ é uma sequência de Cauchy e portanto, é convergente. Logo, $\lim_{n\to\infty} \psi^{\emptyset}_{D_n}$ existe e vamos denota-lo por ψ.

Agora considere uma sequência qualquer $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$. Fixe um inteiro k e considere uma partição de $\mathbb{Z}^d$ formada por translações de elementos D_k disjuntos: $\{D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, ...\}$. Para cada n considere uma cobertura minimal de Λ_n por elementos $D_k^{(i)}$ da partição e considere $[\Lambda_n] := \cup_j D_k^{(j)}$. Agora vamos usar a seguinte desigualdade

$$|\psi^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \psi| \leq |\psi^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}| + |\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \psi^{\emptyset}_{D_k}| + |\psi^{\emptyset}_{D_k} - \psi|.$$

Como $\psi^{\emptyset}_{D_k} \to \psi$ quando $k \to \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 = k_0(\epsilon, \beta, h)$ (dependendo de ϵ, β e h) tal que $|\psi^{\emptyset}_{D_k} - \psi| < \epsilon/3$ para todo $k \geq k_0$.

Agora vamos calcular $\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}$ escrevendo

$$\mathcal{H}^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} = \sum_j \mathcal{H}^{\emptyset}_{D_k^{(j)}} + W_n,$$

onde $|W_n| \leq \frac{|[\Lambda_n]|}{|D_k|}\beta d(2^k)^{d-1} = \beta d 2^{-k}|[\Lambda_n]|$. Observe que $Q := \frac{|[\Lambda_n]|}{|D_k|}$ é a quantidade de elementos D_k que formam $[\Lambda_n]$ para cada n. Com isso, temos que

$$Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} = \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}(\omega)} \leq \left(\sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} \prod_{i=1}^{Q} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_k^{(i)}}(\omega^{(i)})} \right) e^{\beta d 2^{-k}|[\Lambda_n]|}$$

Dividindo a soma de $\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}$ em Q somas de configurações $\omega^{(i)} \in \Omega_{D_k^{(i)}}$, obtemos que

$$\sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} \prod_{i=1}^{Q} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_k^{(i)}}(\omega^{(i)})} = \prod_{i=1}^{Q} \sum_{\omega_{D_k^{(i)}}} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{D_k^{(i)}}(\omega^{(i)})} = \prod_{i=1}^{Q} Z^{\emptyset}_{D_k^{(i)}} = \left(Z^{\emptyset}_{D_k}\right)^{Q}$$

Dessas duas últimas expressões, obtemos que

$$Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} \leq e^{\beta d 2^{-k}|[\Lambda_n]|} \left(Z^{\emptyset}_{D_k}\right)^{|[\Lambda_n]|/|D_k|}.$$

Procedendo da mesma forma, encontramos também a cota inferior de $Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}$ e chegamos a

$$e^{-\beta d 2^{-k}|[\Lambda_n]|} \left(Z^{\emptyset}_{D_k}\right)^{|[\Lambda_n]|/|D_k|} \leq Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} \leq e^{\beta d 2^{-k}|[\Lambda_n]|} \left(Z^{\emptyset}_{D_k}\right)^{|[\Lambda_n]|/|D_k|}.$$

Tomando o logaritmo na desigualdade e depois dividindo por $|[\Lambda_n]|$, temos que

$$-\beta d 2^{-k} + \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_k}}{|D_k|} \leq \frac{\log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}}{|[\Lambda_n]|} \leq \beta d 2^{-k} + \frac{\log Z^{\emptyset}_{D_k}}{|D_k|}$$

e isso implica que

$$|\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \psi^{\emptyset}_{D_k}| \leq \beta d 2^{-k}$$

para todo n e todo k. Com isso, existe $k_1 = k_1(\epsilon, \beta, h)$ tal que

$$|\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \psi^{\emptyset}_{D_k}| < \epsilon/3$$

para todo $k \geq k_1$. Seja $k_2 := \max\{k_0, k_1\}$ e considere $\Delta_n := [\Lambda_n] - \Lambda_n$. Podemos ver que

$$|\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \mathcal{H}^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}| \leq (2d\beta + |h|)|\Delta_n|$$

. Disso, obtemos que

$$Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} = \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}(\omega)} \leq \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}} e^{-\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda_n}(\omega)} \sum_{\omega' \in \Omega_{\Delta_n}} e^{(2\beta d+|h|)|\Delta_n|}$$

$$= Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} 2^{|\Delta_n|} e^{(2d\beta+|h|)|\Delta_n|} = Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} e^{|\Delta_n| \log 2} e^{(2d\beta+|h|)|\Delta_n|}$$

$$= Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} e^{(2d\beta+|h|+\log 2)|\Delta_n|}.$$

De forma similar, encontramos a cota inferior para $Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}$ e podemos escrever

$$|\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}| \leq |\Delta_n|(2d\beta + |h| + \log 2) \leq |\partial^{in}\Lambda_n||D_k|(2d\beta + |h| + \log 2),$$

pois $|\Delta_n|$ tem no máximo $|\partial^{in}\Lambda_n||D_k|$ vértices (pois cada elemento da fronteira deve estar contido em pelo menos um D_k), onde $\partial^{in}\Lambda_n$ são os vértices de Λ_n que estão na fronteira e ainda estão no interior de Λ_n. Observe que

$$1 \leq \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|} = \frac{|\Delta_n| + |\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} \leq 1 + \frac{|\partial^{in}\Lambda_n||D_k|}{|\Lambda_n|},$$

e com isso $\lim_{n\to\infty} \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|} = 1$ usando que Λ_n converge pra $\mathbb{Z}^d$ no sentido de Van Hove. Agora, podemos escrever a estimativa

$$|\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \psi^{\emptyset}_{\Lambda_n}| \leq |\frac{\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|} - \frac{\log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}}{|[\Lambda_n]|}| = \frac{1}{|\Lambda_n|}|\left(\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}\frac{|\Lambda_n|}{|[\Lambda_n]|}\right)|$$

$$\leq \frac{1}{|\Lambda_n|}|\left(\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}\right)| + \frac{1}{|\Lambda_n|}|\left(\log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}\frac{|\Lambda_n|}{|[\Lambda_n]|}\right)|$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_n|}|\left(\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}\right)| + |\left(1 - \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|}\right)||\frac{\log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}}{|\Lambda_n|}|.$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_n|}|\left(\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}\right)| + |\left(1 - \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|}\right)|\left(|\frac{\log Z^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}}{|[\Lambda_n]|}|\right)\frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|}$$

$$\leq \frac{|\partial^{in}\Lambda_n||D_k|(2d\beta + |h| + \log 2)}{|\Lambda_n|} + |\left(1 - \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|}\right)|\frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|}\left(\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}\right)$$

Usando o fato de que $\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]}$ é limitada, quando tomamos $n \to \infty$ temos que $|\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \psi^{\emptyset}_{\Lambda_n}| \to 0$ e então

$$|\psi^{\emptyset}_{[\Lambda_n]} - \psi^{\emptyset}_{\Lambda_n}| < \epsilon/3$$

para todo n suficientemente grande.

Combinando as três estimativas, obtemos $|\psi^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \psi| < \epsilon$ para todo n suficientemente grande e todo $k \geq k_2$. Isso prova a existência do limite.

Agora, vamos provar a independência da condição de fronteira. Escrevendo a expressão da energia para cada Λ_n, podemos ver que

$$|\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda_n} - \mathcal{H}^{\eta}_{\Lambda_n}| \leq 2d\beta|\partial^{in}\Lambda_n|.$$

Dessa forma, obtemos

$$e^{-2d\beta|\partial^{in}\Lambda_n|}Z^{\emptyset}_{\Lambda_n} \leq Z^{\eta}_{\Lambda_n} \leq e^{2d\beta|\partial^{in}\Lambda_n|}Z^{\emptyset}_{\Lambda_n}.$$

Passando o logaritmo e dividindo por $|\Lambda_n|$ chegamos a

$$-2d\beta\frac{|\partial^{in}\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} + \frac{\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|} \leq \frac{\log Z^{\eta}_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|} \leq 2d\beta\frac{|\partial^{in}\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} + \frac{\log Z^{\emptyset}_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|}.$$

Passando o limite $n \to \infty$ e usando que Λ_n é uma sequência de Van Hove, temos que

$$\lim_{\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d} \psi^{\eta}_{\Lambda_n} = \lim_{\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d} \psi^{\emptyset}_{\Lambda_n} = \psi.$$

e segue que o limite não depende da condição de fronteira.

Para mostrarmos que ψ é convexa vamos usar a que $\psi^{\eta}_{\Lambda_n}(\beta,h)$ é convexa para todo n pela Proposição 3.2.4. Considerando $\alpha \in [0,1]$ escrevemos

$$\psi^{\eta}_{\Lambda_n}(\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2, \alpha h_1+(1-\alpha)h_2) \leq \alpha\psi^{\eta}_{\Lambda_n}(\beta_1,h_1)+(1-\alpha)\psi^{\eta}_{\Lambda_n}(\beta_2,h_2)$$

e tomando o limite, segue a convexidade de ψ:

$$\psi(\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2, \alpha h_1+(1-\alpha)h_2) \leq \alpha\psi(\beta_1,h_1)+(1-\alpha)\psi(\beta_2,h_2).$$

Por fim, falta mostrar que ψ é par com relação ao parâmetro h. De fato, pela Proposição 3.2.2, $\psi^{\emptyset}_{\Lambda_n}(\beta,h) = \psi^{\emptyset}_{\Lambda_n}(\beta,-h)$ para todo n. E tomando o limite dos dois lados, segue que $\psi(\beta,h)=\psi(\beta,-h)$.

3.2.2 Transição de Fase do ponto de vista Analítico

Uma outra quantidade que tem um papel importante no estudo do modelo de Ising é a *densidade de magnetização* que é definida como sendo a variável aleatória

$$m_\Lambda := \frac{1}{|\Lambda|}M_\Lambda,$$

onde $M_\Lambda = \sum_{i\in\Lambda}\sigma_i$ é chamado de *magnetização total*. Seguindo a notação recorrente em mecânica estatística, nesse capítulo a *esperança* de uma função f em relação a uma distribuição de probabilidade μ será denotada por $\langle f\rangle_\mu$. Ou seja, a esperança de f sobre $\mu^{\#}_{\Lambda,\beta,h}$ é dada por:

$$\langle f\rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h} := \sum_{\omega\in\Omega^{\#}_{\Lambda}} f(\omega)\mu^{\#}_{\Lambda,\beta,h}(\omega).$$

Também definimos, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$,

$$m^{\#}_{\Lambda}(\beta,h) := \langle m_\Lambda\rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h}.$$

Vamos agora motivar uma caracterização de transição de fase para o modelo de Ising. Como pode ser verificado rapidamente,

$$m_{\Lambda}^{\#}(\beta, h) = \frac{\partial \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h)}{\partial h}. \tag{3.1}$$

Uma questão que agora surge é se a equação (3.1) ainda é válida no limite termodinâmico. Existem dois problemas nesse sentido: por um lado, verificar a existência do limite $\lim_{\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{\partial \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta,h)}{\partial h}$ e se esse limite depende da condição de fronteira tomada; por outro lado, tem também o problema de trocar o limite termodinâmico e a derivada com respeito a h. Estes problemas estão ligados com a diferenciabilidade da função pressão com respeito a h. Usando a convexidade da pressão no limite termodinâmico, temos que as derivadas laterais de $h \longrightarrow \psi(\beta, h)$ existem em todos os pontos ([FV16]). E é óbvio que a pressão vai ser diferenciável com respeito a h se as derivadas laterais $\frac{\partial \psi}{\partial h^-}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial h^+}$ coincidem. Com isso, é natural introduzir, para cada $\beta \geq 0$, o conjunto

$$\mathcal{B}_{\beta} = \{h \in \mathbb{R} : \psi(\beta, .) \text{ é não diferenciável}\}.$$

Baseado nessa discussão acima, a *média da densidade de magnetização* é descontínua precisamente nos pontos onde a pressão é não diferenciável em h. Isto nos leva ao seguinte:

Definição 3.2.6. *A pressão exibe transição de fase em (β, h) se $h \longrightarrow \psi(\beta, h)$ não é diferenciável nesse ponto.*

Uma outra definição de transição de fase será tratada na próxima seção.

3.3 Estados de Gibbs de Volume Infinito

A ideia desta seção é estudar o comportamento das distribuições $\mu_{\Lambda_n,\beta,h}^{\#}$ quando $n \to \infty$, ou seja, estudar o que acontece com as distribuições no limite termodinâmico. Uma maneira de fazer isso é considerando pontos de acumulação de sequências do tipo $\left(\mu_{\Lambda_n,\beta,h}^{\eta_n}\right)_{n \geq 1}$.

Isso pode ser feito usando uma noção de convergência no espaço de probabilidades ou distribuições. No que será feito a seguir vamos usar uma maneira menos abstrata: Um estado (de volume infinito) será identificado com um valor médio de *funções locais*, isto é, valores observáveis que dependem apenas de um número finito de spins.

Definição 3.3.1. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é local se existe $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ tal que $f(\omega) = f(\omega')$ quando ω e ω' coincidem em Δ. O menor conjunto Δ é chamado suporte de f e é denotado por* $\mathrm{supp}(f)$.

No que segue, sempre que existir $\Delta \supset \mathrm{supp}(f)$, então para cada $\omega' \in \Omega_\Delta$, $f(\omega')$ é definido como o valor de f em qualquer configuração ω de Ω tal que $\omega_i = \omega_i^{'}$ para todo $i \in \Delta$.

Definição 3.3.2. *Um estado de volume infinito (ou simplesmente um estado) é uma aplicação associando cada função local f a um número real $\langle f \rangle$ e satisfazendo o seguinte:*

1) $\langle 1 \rangle = 1$.

2) Se $f \geq 0$, então $\langle f \rangle \geq 0$.

3) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle f + \lambda g \rangle = \langle f \rangle + \lambda \langle g \rangle$.

Definição 3.3.3. *Sejam $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ e $(\#_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de condições de fronteira. Dizemos que a sequência de distribuições de Gibbs $(\mu^{\#_n}_{\Lambda_n,\beta,h})_{n \geq 1}$ converge para o estado $\langle . \rangle$ se, e somente se, $\langle f \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f \rangle^{\#_n}_{\Lambda_n,\beta,h}$ para toda função local f. O estado $\langle . \rangle$ é chamado de estado de Gibbs em (β, h).*

Esta última definição é natural do ponto de vista do limite termodinâmico, pois afirma formalmente que quantidades locais de um sistema com um número grande de sítios é bem aproximado por uma correspondente quantidade tomada no sistema infinito.

Uma vez que os estados são definidos no reticulado inteiro ($\mathbb{Z}^d$) é natural saber quais estados são *invariantes por translação.* Uma translação por $j \in \mathbb{Z}^d$, $\theta_j : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ é definida por

$$\theta_j(i) := i + j.$$

De forma natural, as translações também agem nas configurações: Se $\omega \in \Omega$ então $\theta_i(\omega)$ é definido por

$$\theta_i(\omega_j) := \omega_{i-j}.$$

Definição 3.3.4. *Um estado $\langle . \rangle$ é invariante por translações se $\langle f \circ \theta_j \rangle = \langle f \rangle$. Para toda função local f e para todo $j \in \mathbb{Z}^d$.*

Uma questão central que surge agora é: podemos construir estados de Gibbs para o modelo de Ising com parâmetros β e h? A partir daqui, vamos introduzir algumas ferramentas para se obter uma resposta pra essa questão. O resultado maior nesse sentido será através de um teorema que mostra que as condições de fronteira η^+ e η^- podem ser usadas para a construção de dois estados de Gibbs que serão muito importantes para se estudar fenômenos de *transição de fase.*

3.3.1 Duas Famílias de Funções Locais

Vamos introduzir nessa seção duas famílias de funções locais que serão utilizadas como auxiliares para se demonstrar a existência dos estados de Gibbs. Para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$, defina

$$\sigma_A := \prod_{j \in A} \sigma_j \tag{3.2}$$

$$n_A := \prod_{j \in A} \frac{1}{2}(1 + \sigma_j). \tag{3.3}$$

Como é fácil ver, os valores que σ_A e n_A assumem dependem apenas dos vértices das configurações no interior de A. Portanto, essas funções são locais.

Lema 3.3.5. *Seja f uma função local. Existem coeficientes reais $(f'_A)_{A\subset supp(f)}$ e $(f''_A)_{A\subset supp(f)}$ tais que as seguintes igualdades valem:*

$$f = \sum_{A\subset supp(f)} f'_A \sigma_A \text{ e } f = \sum_{A\subset supp(f)} f''_A n_A.$$

Para provar a primeira identidade vamos usar a seguinte expressão que será provada adiante:

$$2^{-|B|} \sum_{A\subset B} \sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega) = 1_{\{\omega_i=\omega'_i;\forall i\in B\}}. \tag{3.4}$$

Usando que f é uma função local e em seguida (3.3) com $B = \text{supp}(f)$ segue que

$$f(\omega) = \sum_{\omega'\in\Omega_{supp(f)}} f(\omega')1_{\{\omega_i=\omega'_i;\forall i\in supp(f)\}}$$

$$= \sum_{\omega'\in\Omega_{supp(f)}} f(\omega')\left(2^{-|supp(f)|}\sum_{A\subset supp(f)} \sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega)\right)$$

$$= \sum_{A\subset supp(f)}\left(2^{-|supp(f)|}\sum_{\omega'_i\in\Omega_{supp(f)}} f(\omega')\sigma_A(\omega')\right)\sigma_A(\omega) = \sum_{A\subset supp(f)} f'_A\sigma_A(\omega)$$

e a primeira identidade está provada. A segunda identidade segue da primeira e o fato de que $\sigma_A = \prod_{j\in A}(2n_j - 1)$ onde $n_j = \frac{1}{2}(1+\sigma_j)$.

Agora para concluir a prova do lema vamos mostrar 3.4. Assumindo que $\omega_i = \omega'_i$ para todo $i \in B$, temos $\sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega) = \prod_{i\in A}\omega'_i\omega_i = 1$ uma vez que $\omega'_i\omega_i = \omega_i^2 = 1$, para todo $i \in A \subset B$. Com isso, $\sum_{A\subset B}\sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega) = 2^{|B|}$ e a expressão 3.3 é verdadeira.

Quando existe $i \in B$ tal que $\omega'_i \neq \omega_i$ ou seja, $(\omega'_i\omega_i = -1)$, temos

$$\sum_{A\subset B}\sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega) = \sum_{A\subset B-\{i\}}(\sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega) + \sigma_{A\cup\{i\}}(\omega')\sigma_{A\cup\{i\}}(\omega))$$

$$= \sum_{A\subset B-\{i\}} (\sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega) + \sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega)\omega_i'\omega_i)$$

$$= \sum_{A\subset B-\{i\}} (\sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega))(1-\omega_i'\omega_i) = 0.$$

3.3.2 A Desigualdade FKG e Algumas Consequências

A desigualdade FKG (devido a Fortuin, Kasteleyn e Ginibre) em [FKG71] é uma das mais importantes ferramentas no estudo do modelo de Ising. Ela será crucial para a construção dos estados de Gibbs $\langle . \rangle^+_{\beta,h}$ e $\langle . \rangle^-_{\beta,h}$ que faremos a seguir.

A ordem total do conjunto $\{-1, 1\}$ induz uma ordem parcial no conjunto Ω: $\omega \leq \omega'$ se e somente se $\omega_i \leq \omega_i'$ para todo $i \in \mathbb{Z}^d$. Baseado nisso, dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é não-decrescente se e somente se $f(\omega) \leq f(\omega')$ para todo $\omega \leq \omega'$. Observe que para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ e todo $i \in \mathbb{Z}^d$ é fácil ver que as funções σ_i, n_i e n_A são não-decrescentes.

Lema 3.3.6. (Desigualdade FKG) *Sejam $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $\#$ alguma condição de fronteira. Então, para qualquer par de funções não-decrescentes f e g vale que,*

$$\langle fg \rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h} \geq \langle f \rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h} \langle g \rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h}.$$

Ver [FV16].

Lema 3.3.7. *Sejam f uma função não-decrescente e $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d$. Então, para quaisquer $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$,*

$$\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_1,\beta,h} \geq \langle f \rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}.$$

O mesmo é verdade para funções não-crescentes e condição de fronteira negativa.

Vamos usar a seguinte propriedade que será mostrada em seguida:

$$\mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(.|\sigma_i = \omega_i' \quad \forall i \in \Lambda - \Delta) = \mu^{\omega'}_{\Delta,\beta,h}(.). \tag{3.5}$$

Por 3.4, temos que

$$\langle f\rangle^{+}_{\Lambda_1,\beta,h}=\langle f|\,\sigma_i=1,\ \ \forall i\in\Lambda_2-\Lambda_1\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}.$$

Sendo a função indicadora $1_{\{\sigma_i=1\ \forall i\in\Lambda_2-\Lambda_1\}}$ uma função não-decrescente, podemos usar a desigualdade de FKG para obter

$$\langle f\rangle^{+}_{\Lambda_1,\beta,h}=\frac{\langle f1_{\{\sigma_i=1\ \forall i\in\Lambda_2-\Lambda_1\}}\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}}{\langle 1_{\{\sigma_i=1\ \forall i\in\Lambda_2-\Lambda_1\}}\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}}\geq\frac{\langle f\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}\langle 1_{\{\sigma_i=1\ \forall i\in\Lambda_2-\Lambda_1\}}\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}}{\langle 1_{\{\sigma_i=1\ \forall i\in\Lambda_2-\Lambda_1\}}\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}}=\langle f\rangle^{+}_{\Lambda_2,\beta,h}.$$

Agora, vamos mostrar a identidade (3.5). Para simplificar a notação, vamos supor $h=0$. Pela definição da distribuição de Gibbs, temos que o numerador de $\mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,0}(\omega|\sigma_i=\omega'_i\ \forall i\in\Lambda-\Delta)$ é formado por

$$\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right)$$

$$=\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Delta}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right)\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda;\{i,j\}\cap\Delta=\emptyset}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right).$$

Dividindo a última expressão pela função partição com relação à distribuição $\mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,0}(\omega|\sigma_i=\omega'_i\ \forall i\in\Lambda-\Delta)$, obtemos que

$$\mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,0}(\omega|\sigma_i=\omega'_i\ \ \forall i\in\Lambda-\Delta)=$$

$$=\frac{\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Delta}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right)\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda;\{i,j\}\cap\Delta=\emptyset}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right)}{\left(\sum_{\omega\in\Omega_\Delta}\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Delta}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right)\right)\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda;\{i,j\}\cap\Delta=\emptyset}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right).}$$

$$=\frac{\exp\left(\beta\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Delta}\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega)\right)}{Z^{\omega'}_{\Delta,\beta,0}}=\mu^{\omega'}_{\Delta,\beta,0}(\omega).$$

Observe que o somatório da função partição é tomado apenas com relação a Δ pois este é o único conjunto que contribui para a geração de novas configurações, uma vez que fora de

Δ os spins são fixos iguais a ω'.

Lema 3.3.8. Seja f uma função qualquer não-decrescente. Então, para todo $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$,

$$\langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h} \leq \langle f \rangle^{+}_{\Lambda,\beta,h}$$

para toda condição de fronteira $\eta \in \Omega$ e todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

Seja $I(\omega) = \exp\Big(\beta \sum_{i\in\Lambda, j\notin\Lambda; i\approx j} \sigma_i(\omega)(1-\sigma_j(\omega))\Big)$. Quando $\eta = +$, temos $\sigma_j = 1$ para todo j e com isso $I(\omega) = 1$. Disso, podemos escrever que

$$\sum_{\omega\in\Omega^+_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} = \sum_{\omega\in\Omega^\eta_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega).$$

Sendo f não-decrescente e não necessariamente local, obtemos que

$$\sum_{\omega\in\Omega^+_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} f(\omega) \geq \sum_{\omega\in\Omega^\eta_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega) f(\omega).$$

Isso implica que

$$\langle f \rangle^{+}_{\Lambda,\beta,h} = \frac{\sum_{\omega\in\Omega^+_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} f(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega^+_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)}} \geq \frac{\sum_{\omega\in\Omega^\eta_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} f(\omega) I(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega^\eta_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega)}$$

$$\frac{\langle If \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}}{\langle I \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}} \geq \frac{\langle I \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h} \langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}}{\langle I \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}} = \langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h},$$

onde usamos FKG (I é uma função não-decrescente) para obter a última desigualdade na expressão acima.

3.3.3 O Teorema de Existência de Estados de Gibbs para o Modelo de Ising

Agora estamos em condição de enunciar e demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.3.9. *Sejam $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$ e seja a sequência $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. As distribuições de*

Gibbs de volume finito com condições de fronteira + e - convergem para estados de Gibbs de volume infinito:

$$\lim_{n\to\infty}\langle . \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle . \rangle^{+} \text{ e } \lim_{n\to\infty}\langle . \rangle^{-}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle . \rangle^{-}.$$

Além disso, os estados $\langle . \rangle^{+}$ e $\langle . \rangle^{-}$ não dependem da sequência $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ e são invariantes por translações.

Inicialmente vamos considerar a condição de fronteira positiva (η^{+}). Pelo Lema 3.3.5, dada uma função local f existem constantes f''_A tais que $f = \sum_{A\subset supp(f)} f''_A n_A$. Com isso,

$$\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle \sum_{A\subset supp(f)} f''_A n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \sum_{A\subset supp(f)} f''_A \langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h}. \tag{3.6}$$

Sabendo que n_A é não-decrescente e usando o Lema 3.3.7, podemos obter que $\langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} \geq \langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_{n+1},\beta,h}$ para todo $n \geq 1$, uma vez que $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$ para todo n. Agora observe também que $1+\sigma_j$ é não-decrescente e não-negativa para cada j e então podemos usar a desigualdade de FKG (Lema 3.3.6) para obter que

$$\langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle \prod_{j\in A} \frac{1}{2}(1+\sigma_j) \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} \geq \prod_{j\in A} \frac{1}{2}\langle 1+\sigma_j \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} \geq 0$$

para todo $n \geq 1$. Ou seja, $\langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h}$ é uma sequência monótona limitada e com isso, converge quando $n \to \infty$. Consequentemente, $\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h}$ também é convergente por (3.5). Vamos denotar esse limite por $\lim_{n\to\infty}\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} := \langle f \rangle^{+}_{\beta,h}$. De fato, este limite é um estado de Gibbs de volume infinito porque

$$\langle 1 \rangle^{+}_{\beta,h} = \lim_{n\to\infty}\langle 1 \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = 1;$$

$$\langle f \rangle^{+}_{\beta,h} = \lim_{n\to\infty}\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} \geq 0 \text{ quando } f \geq 0;$$

$$\langle f+\lambda g \rangle^{+}_{\beta,h} = \lim_{n\to\infty}\langle f+\lambda g \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \lim_{n\to\infty}\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} + \lambda \lim_{n\to\infty}\langle g \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle f \rangle^{+}_{\beta,h} + \lambda \langle g \rangle^{+}_{\beta,h}.$$

Agora, vamos mostrar que esse limite não depende da sequência $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Sejam $\Lambda_n^1 \uparrow \mathbb{Z}^d$ e $\Lambda_n^2 \uparrow \mathbb{Z}^d$ duas sequências e seus respectivos limites $\langle . \rangle_{\beta,h}^{+,1}$ e $\langle . \rangle_{\beta,h}^{+,2}$. Queremos mostrar que estes limites são iguais, ou seja, $\langle f \rangle_{\beta,h}^{+,1} = \langle f \rangle_{\beta,h}^{+,2}$ para toda função local f.

Seja a nova sequência $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ definida de maneira que $\Delta_{2k-1} \subset \{\Lambda_n^1 : n \geq 1\}$, $\Delta_{2k} \subset \{\Lambda_n^2 : n \geq 1\}$ e $\Delta_{k+1} \not\subset \Delta_k$. Com isso, observe que $\Delta_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ e pelo resultado anterior, $\lim_{k\to\infty} \langle f \rangle_{\Delta_k,\beta,h}^{+}$ existe para toda função local f.

Como $\left(\langle f \rangle_{\Delta_{2k-1},\beta,h}^{+}\right)_{k\geq 1}$ é uma subsequência de $\left(\langle f \rangle_{\Lambda_n^1,\beta,h}^{+}\right)_{n\geq 1}$ e $\left(\langle f \rangle_{\Delta_{2k},\beta,h}^{+}\right)_{k\geq 1}$ é uma subsequência de $\left(\langle f \rangle_{\Lambda_n^2,\beta,h}^{+}\right)_{n\geq 1}$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \langle f \rangle_{\Delta_{2k-1},\beta,h}^{+} = \lim_{k\to\infty} \langle f \rangle_{\Delta_k,\beta,h}^{+} = \lim_{n\to\infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n^1,\beta,h}^{+} = \langle f \rangle_{\beta,h}^{+,1};$$

$$\lim_{k\to\infty} \langle f \rangle_{\Delta_{2k},\beta,h}^{+} = \lim_{k\to\infty} \langle f \rangle_{\Delta_k,\beta,h}^{+} = \lim_{n\to\infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n^2,\beta,h}^{+} = \langle f \rangle_{\beta,h}^{+,2};$$

Portanto, $\langle f \rangle_{\beta,h}^{+,1} = \langle f \rangle_{\beta,h}^{+,2}$ para toda função local f.

Por fim, vamos mostrar a invariância por translações. Seja f uma função local qualquer. Para todo $j \in \mathbb{Z}^d$, $f \circ \theta_j$ também é uma função local e $\theta_{-j}(\Lambda_n) := \Lambda_n - j \uparrow \mathbb{Z}^d$. Com isso temos

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n,\beta,h}^{+} \to \langle f \rangle_{\beta,h}^{+} \quad \text{e} \quad \langle f \circ \theta_j \rangle_{\theta_{-j}(\Lambda_n),\beta,h}^{+} \to \langle f \circ \theta_j \rangle_{\beta,h}^{+}.$$

Agora observe que por definição e usando a substituição $\omega' = \theta_j(\omega)$, temos

$$\langle f \circ \theta_j \rangle_{\theta_{-j}(\Lambda_n),\beta,h}^{+} = \sum_{\omega \in \Omega_{\theta_{-j}(\Lambda_n)}} f(\theta_j(\omega)) \mu_{\theta_{-j}(\Lambda_n),\beta,h}^{+}(\omega)$$

$$= \sum_{\omega' \in \Omega_{\Lambda_n}} f(\omega') \mu_{\Lambda_n,\beta,h}^{+}(\omega') = \langle f \rangle_{\Lambda_n,\beta,h}^{+}.$$

Portanto, passando o limite $n \to \infty$ obtemos $\langle f \rangle_{\beta,h}^{+} = \langle f \circ \theta_j \rangle_{\beta,h}^{+}$ e portanto, o estado é invariante por translações. Com isso, provamos o teorema para o caso de fronteira positiva.

Por fim, vamos mostrar a existência do limite para condição de fronteira negativa. Usando o Lema 3.3.5, temos que

$$\langle f\rangle^-_{\Lambda_n,\beta,h} = \sum_{A\subset supp(f)} f''_A \langle n_A\rangle^-_{\Lambda_n,\beta,h}. \tag{3.7}$$

Usando o Lema 3.3.7 (sabendo que $-n_A$ é não-crescente e não positiva) e o Lema 3.3.8, temos que

$$0 \leq \langle n_A\rangle^-_{\Lambda_1,\beta,h} \leq \langle n_A\rangle^-_{\Lambda_2,\beta,h} \leq ... \leq \langle n_A\rangle^-_{\Lambda_n,\beta,h} \leq \langle n_A\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}.$$

Sabemos que $\langle n_A\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h} \to \langle n_A\rangle^+_{\beta,h}$ e como toda sequência convergente é limitada, existe $L\in\mathbb{R}$ tal que $\langle n_A\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h} \leq L$ para todo $n\geq 1$. Dessa forma, $\left(\langle n_A\rangle^-_{\Lambda_n,\beta,h}\right)_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona limitada e, portanto, convergente. Com isso, por 3.6, $\lim_{n\to\infty}\langle f\rangle^-_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle f\rangle^-_{\beta,h}$.

A prova que o limite não depende da sequência $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ e da invariância por translações é exatamente a mesma do caso com fronteira positiva, apenas troca-se "$+$" por "$-$"na escrita.

3.3.4 Diagrama de Fase

Observe que o teorema não afirma que os estados $\langle . \rangle^+_{\beta,h}$ e $\langle . \rangle^-_{\beta,h}$ são diferentes ou iguais. Determinar o conjunto de parâmetros β e h onde os estados de Gibbs são diferentes tem um papel central no estudo do modelo de Ising. Ou seja, estamos interessados em determinar se esses dois tipos de estados de Gibbs são os mesmos ou se existem valores de temperatura β e campo magnético h para os quais a condição de fronteira influencia o limite termodinâmico, levando a múltiplos estados de Gibbs.

A resposta para esta pergunta depende da dimensão d e dos parâmetros β e h.

Definição 3.3.10. *Se pelo menos dois estados de Gibbs distintos podem ser construídos a partir de um par (β, h), nós dizemos que existe uma transição de fase em (β, h).*

Agora nós estamos em condição de estabelecer *o diagrama de fase* do modelo de Ising, ou seja, um resultado que revele quais as condições e relações entre dimensão d e os parâmetros β e h definindo as transições de fase.

Teorema 3.3.11. (*Diagrama de Fase*)

1) Para qualquer $d \geq 1$, quando $h \neq 0$, existe um único estado de Gibbs para todo os valores de $\beta \geq 0$.

2) Para $d = 1$, existe um único estado de Gibbs para todos os valores de $\beta \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$.

3) Quando $h = 0$ e $d \geq 2$, existe $\beta_c = \beta(d) \in (0, \infty)$ tal que:

a) Quando $\beta < \beta_c$, o estado de Gibbs em $(\beta, 0)$ é único.

b) Quando $\beta > \beta_c$, uma transição de fase ocorre em $(\beta, 0)$, ou seja, $\langle . \rangle^+_{\beta,0} \neq \langle . \rangle^-_{\beta,0}$.

O resultado acima foi enunciado aqui para evidenciar a existência de transição de fase baseada nos estados de Gibbs obtidos pelo Teorema 3.3.9. Este Teorema apresenta uma demonstração relativamente extensa e sua prova completa pode ser encontrada em [FV16].

Nesse capítulo foram mostradas duas definições de transição de fase para o modelo de Ising: Por um lado, através da diferenciabilidade da função pressão $\psi(\beta, h)$ e por outro lado, através da possibilidade de construção de estados de Gibbs $\langle . \rangle_{\beta,h}$. Seria razoável se questionar se estas duas abordagens tem alguma relação. De fato, há uma equivalência entre essas duas definições de transição de fase:

Proposição 3.3.12. *$h \longrightarrow \psi(\beta, h)$ é diferenciável em h se, e somente se, existe um único estado de Gibbs em (β, h).*

Ver [FV16], página 108.

3.4 Uma Definição de Entropia Métrica para o Modelo de Ising com Volume Finito

Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ um subconjunto de volume finito e η uma condição de fronteira. O espaço $\Omega_\Lambda^\eta = \{-1,1\}^\Lambda$ tem exatamente $2^{|\Lambda|}$ elementos, ou seja, também é um conjunto finito. Como já vimos, a entropia de um conjunto finito Ω com respeito a uma distribuição μ pode ser definida como $S(\mu) = -\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega)\log(\mu(\omega))$. Usando esta expressão para o espaço Ω_Λ^η com a distribuição de Gibbs $\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta$ obtemos $S(\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta)$. Em cima disso, temos que

$$S(\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta) := -\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta} \mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega)\log(\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega))$$

$$= -\sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta} \mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega)\log(\frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega)}}{Z_{\Lambda,\beta,h}^\eta})$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta} \mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega)\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega) + \log(Z_{\Lambda,\beta,h}^\eta) = \langle \mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta\rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta + \log(Z_{\Lambda,\beta,h}^\eta).$$

Ou seja,

$$\frac{S(\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta)}{|\Lambda|} = \langle\frac{\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta}{|\Lambda|}\rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta + \psi_\Lambda^\eta(\beta,h).$$

Fazendo uma analogia dessa última expressão com o princípio variacional num estado de equilíbrio (que nesse caso seria a distribuição de Gibbs), o número $\frac{S(\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta)}{|\Lambda|}$ faria o papel de entropia métrica e a pressão do modelo $\psi_\Lambda^\eta(\beta,h)$ seria a pressão topológica com o correspondente potencial dado por $\frac{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta}{|\Lambda|}$. Devido a motivação dessa analogia, vamos definir a entropia do Modelo de Ising com volume finito e condição de fronteira η pelo número $h_{\Lambda,\beta,h}^\eta := \frac{S(\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta)}{|\Lambda|}$.

De acordo com essa definição, temos que

$$|h_{\Lambda,\beta,h}^\eta| = |\langle\frac{\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta}{|\Lambda|}\rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta + \psi_\Lambda^\eta(\beta,h)| \leq |\langle\frac{\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta}{|\Lambda|}\rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta| + |\psi_\Lambda^\eta(\beta,h)|$$

$$\leq \langle\frac{|\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta|}{|\Lambda|}\rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta + |\psi_\Lambda^\eta(\beta,h)| \leq \sup_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta}\left(\frac{|\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega)|}{|\Lambda|}\right) + |\psi_\Lambda^\eta(\beta,h)|$$

$$\leq \frac{(2\beta d + |h|)(|\Lambda|)}{|\Lambda|} + \frac{\log(2^{|\Lambda|}e^{(2\beta d+|h|)|\Lambda|})}{|\Lambda|} = \log 2 + 4\beta d + 2|h|.$$

Ou seja, para todo $\beta \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$ e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, a entropia é uma função limitada e vale que

$$|h^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}| \leq \log 2 + 4\beta d + 2|h|.$$

Observe que $h^{\eta}_{\Lambda,0,0} = \psi^{\eta}_{\Lambda}(0,0)$ e nesse caso, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, temos que $h^{\eta}_{\Lambda,0,0} = \log 2 = \psi(0,0)$.

Essa noção de entropia definida acima, é válida para o caso de volumes finitos. Nesse contexto, seria razoável definir a entropia do modelo para todo o reticulado $\mathbb{Z}^d$ como $h(\beta,h) := \lim_{n\to\infty} \frac{S(\mu^{\eta}_{\Lambda_n,\beta,h})}{|\Lambda_n|}$. Uma vez que $\lim_{\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d} \psi^{\eta}_{\Lambda_n} = \psi$, para que $h(\beta,h)$ esteja bem definido é necessário e suficiente mostrar que $\lim_{n\to\infty} \langle \frac{\mathcal{H}^{\eta}_{\Lambda_n,\beta,h}}{|\Lambda_n|} \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}$ existe. Observe que dessa maneira, a entropia seria apenas função dos parâmetros β e h e não teríamos explicitamente qual a medida $\mu_{\beta,h}$ que apareceria como limite termodinâmico de $\mu^{\eta}_{\Lambda_n,\beta,h}$. A entropia métrica e topológica para dimensões superiores, considerando o reticulado d-dimensional, pode ser desenvolvida de maneira geral estendendo as noções de entropia mostradas no cápitulo 1. Isso será feito no próximo capítulo, no contexto de shifts e subshifts multidimensionais. Neste cenário geral, será mostrado que em certo sentido a entropia topológica relacionada ao modelo de Ising é igual a $\log 2$.

4 Formalismo Termodinâmico para Ações de $\mathbb{Z}^d$

Nesse cápitulo, vamos usar as técnicas e ideias do Formalismo Termodinâmico geral, realizadas no primeiro capítulo, para se obter alguns resultados envolvendo ações no reticulado $\mathbb{Z}^d$ e, mais particularmente, deslocamentos ou shifts de dimensão finita qualquer $d \geq 1$. Seja G o grupo aditivo $\mathbb{Z}^d$. Uma *ação* de G num conjunto qualquer M é uma aplicação $T : G \times M \to M$ tal que $T^e(x) = x$ e $T^a(T^b(x)) = T^{a+b}(x)$ para todos $a, b \in G$ e para todo $x \in M$, onde e é o elemento neutro de G, ou seja, $e = (0, 0..., 0) \in \mathbb{Z}^d$. É conveniente escrever G como reunião de certos conjuntos finitos: $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$, onde $\Lambda_n = \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n\}^d$ para todo $n \geq 1$. Em particular, $\Lambda_0 = \{0\}^d = \{e\}$. Da mesma forma como feito anteriormente no texto, $|\Lambda|$ = cardinalidade de Λ.

4.1 Entropia Topológica de Ações do Grupo Aditivo $\mathbb{Z}^d$

Consideramos $G = \mathbb{Z}^d$ com a topologia discreta. Seja M um subconjunto compacto de um espaço topológico e seja $T : G \times M \to M$ uma ação contínua de G sobre M. Vamos definir a entropia topológica de T usando a ideia de definição via coberturas abertas, realizada na Seção 1.2.1. Dada uma cobertura aberta α de M temos que $N(\alpha) := \min\{|\gamma| : \gamma \text{ é subcobertura de } \alpha\}$ e foi definido o número $H(\alpha) := \log N(\alpha)$ (logaritmo na base e) como a entropia da partição α.

Para cada $a \in G$ e cada cobertura aberta α de M, $T^{-a}(\alpha) := \{T^{-a}(A) : A \in \alpha\}$ é uma outra cobertura aberta de M. Então, para cada conjunto finito $\Lambda \subset G$, podemos definir $\alpha^{\Lambda} := \bigvee_{a \in \Lambda} T^{-a}(\alpha)$, ou seja, enumerando os vértices de Λ, podemos escrever $\alpha^{\Lambda} = \alpha \vee T^{-a_1}(\alpha) \vee ... \vee T^{-a_{|\Lambda|-1}}(\alpha)$.

Proposição 4.1.1. *Sejam α_1, α_2 coberturas abertas do espaço topológico M e $T : G \times M \to M$ uma ação contínua de G sobre M.*

a) $H(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq H(\alpha_1) + H(\alpha_2)$.

b) *Se $\alpha_1 \prec \alpha_2$, então, $H(\alpha_1) \leq H(\alpha_2)$.*

c) $H(T^{-a}(\alpha_1)) \leq H(\alpha_1)$, *para todo $a \in G$.*

d) $H(\alpha_1^{\Lambda}) \leq |\Lambda| H(\alpha_1)$, *para todo $\Lambda \subset G$.*

Os itens **a)** e **b)** seguem diretamente da Proposição 1.2.3.

c): Seja $\{A_1, ..., A_{N(\alpha_1)}\}$ uma subcobertura minimal de α_1. Com isso, $\{T^{-a}(A_1), ..., T^{-a}(A_{N(\alpha_1)})\}$ é subcobertura de $T^{-a}(\alpha_1)$, não necessariamente minimal. Disso, $N(T^{-a}(\alpha_1)) \leq N(\alpha_1)$ e portanto, $H(T^{-a}(\alpha_1)) \leq H(\alpha_1)$.

d): Pelos itens anteriores,

$$H(\alpha_1^{\Lambda}) = H(\alpha \vee T^{-a_1}(\alpha_1) \vee ... \vee T^{-a_{|\Lambda|-1}}(\alpha_1))$$

$$\leq H(\alpha_1) + H(T^{-a_1}(\alpha_1)) + ... + H(T^{-a_{|\Lambda|-1}}(\alpha_1))$$

$$\leq H(\alpha_1) + H(\alpha_1) + ... + H(\alpha_1) = |\Lambda| H(\alpha_1).$$

Com a Proposição 4.1.1, $\frac{H(\alpha^{\Lambda})}{|\Lambda|} \leq H(\alpha)$, para todo $\Lambda \subset G$. Assim, definimos a entropia de T com relação à cobertura α:

$$h(T, \alpha) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H(\alpha^{\Lambda_n}) \tag{4.1}$$

Por fim, definimos a entropia da ação T como sendo o número

$$h(T) := \sup_{\alpha}\{h(T,\alpha) : \alpha \text{ é uma cobertura aberta de } M\}. \tag{4.2}$$

A definição acima, só faz sentido se o limite (4.1) existir.

Lema 4.1.2 *O limite* (4.1) *existe.*

Observe que quando $n \geq m$, temos $\alpha^{\Lambda_m} \prec \alpha^{\Lambda_n}$ e pela Proposição 4.1.1, vale que $N(\alpha^{\Lambda_m}) \leq N(\alpha^{\Lambda_n})$. Além disso, como $|\Lambda_{nk}| \leq k^d|\Lambda_n|$, afirmamos que $N(\alpha^{\Lambda_{nk}}) \leq N(\alpha^{\Lambda_n})^{k^d}$, para todo inteiro $k \geq 1$. De fato, podemos considerar $\Lambda_{n_1} = \Lambda_n$ e $\Lambda_{n_q} = \Lambda_{nk} - (\bigcup_{i=1}^{q-1} \Lambda_{n_i})$ para $q \geq 2$, sendo todos translações de Λ_n. Disso, temos que $N(\alpha^{\Lambda_{nk}}) = N((\bigvee_{a\in\Lambda_{n_1}} T^{-a}(\alpha)) \vee ... \vee (\bigvee_{a\in\Lambda_{n_q}})T^{-a}(\alpha)) \leq N(\alpha^{\Lambda_n})N(\alpha^{\Lambda_n})...N(\alpha^{\Lambda_n}) \leq (N(\alpha^{\Lambda_n}))^{k^d}$, como queríamos.

Agora seja m um inteiro positivo fixado. Dado $n \geq m$, existe um k inteiro positivo tal que $mk \leq n \leq m(k+1)$. Temos que $|\Lambda_n| \geq |\Lambda_{mk}|$ e vale que

$$\frac{|\Lambda_{mk}|}{|\Lambda_m|k^d} = \left(\frac{2mk+1}{2mk+k}\right)^d > \left(\frac{2m}{2m+1}\right)^d.$$

Sabemos que $N(\alpha^{\Lambda_n}) \leq N(\alpha^{\Lambda_{m(k+1)}}) \leq (N(\alpha^{\Lambda_m}))^{(k+1)^d}$ e passando o logaritmo, obtemos que

$$H(\alpha^{\Lambda_n}) \leq H(\alpha^{\Lambda_{m(k+1)}}) \leq (k+1)^d H(\alpha^{\Lambda_m})$$

. Com isso, podemos escrever que

$$\frac{H(\alpha^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} \leq \frac{(k+1)^d H(\alpha^{\Lambda_m})}{|\Lambda_{mk}|} \leq \frac{(k+1)^d H(\alpha^{\Lambda_m})}{k^d|\Lambda_m|}\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^d$$

.

Quando $n \to \infty$, temos $k \to \infty$ e obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} \leq \frac{H(\alpha^{\Lambda_m})}{|\Lambda_m|} \left(\frac{2m+1}{2m}\right)^d$$

para todo m inteiro positivo. Com isso, obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{H(\alpha^{\Lambda_m})}{|\Lambda_m|} \left(\frac{2m+1}{2m}\right)^d = \liminf_{m\to\infty} \frac{H(\alpha^{\Lambda_m})}{|\Lambda_m|}$$

e segue que o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|}$ existe.

Lema 4.1.3. *Para cada m e para toda cobertura aberta α, temos $h(T, \alpha^{\Lambda_m}) = h(T, \alpha)$.*

É fácil ver que se $\alpha_1 \prec \alpha_2$, então $\alpha_1^{\Lambda_n} \prec \alpha_2^{\Lambda_n}$ e pela Proposição 4.1.1, segue que $H(\alpha_1^{\Lambda_n}) \leq H(\alpha_2^{\Lambda_n})$ para todo $n \geq 1$. Dividindo ambos os lados da desigualdade e fazendo $n \to \infty$, obtemos que $h(T, \alpha_1) \leq h(T, \alpha_2)$. Observe que $\alpha \prec \alpha^{\Lambda_m}$ e, pelo o que acabamos de provar, segue que $h(T, \alpha) \leq h(T, \alpha^{\Lambda_m})$. Agora, basta provar que $h(T, \alpha) \geq h(T, \alpha^{\Lambda_m})$ para todo m. Podemos ver que para todo $n \geq 1$, $\Lambda_{m+n} = \Lambda_n + \Lambda_m$. Com isso, $\alpha^{\Lambda_{m+n}} \subset (\alpha^{\Lambda_m})^{\Lambda_n}$ e segue que $(\alpha^{\Lambda_m})^{\Lambda_n} \prec \alpha^{\Lambda_{m+n}}$. Mais uma vez usando a proposição 4.1.1, obtemos que $H((\alpha^{\Lambda_m})^{\Lambda_n}) \leq H(\alpha^{\Lambda_{m+n}})$. Daí, podemos escrever que

$$\frac{H((\alpha^{\Lambda_m})^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} \leq \frac{H(\alpha^{\Lambda_{m+n}})}{|\Lambda_n|} = \frac{H(\alpha^{\Lambda_{m+n}})}{|\Lambda_{m+n}|}\frac{|\Lambda_{m+n}|}{|\Lambda_n|}.$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ e sabendo que $\lim_{n\to\infty} \frac{|\Lambda_{m+n}|}{|\Lambda_n|} = 1$, obtemos $h(T, \alpha^{\Lambda_m}) \leq h(T, \alpha)$ para todo m.

Dizemos que uma cobertura aberta α_1 de M é *geradora topológica* se para toda cobertura aberta α_2 de M existe m tal que $\alpha_2 \prec \alpha_1^{\Lambda_m}$. O lema a seguir afirma que podemos usar uma geradora topológica para computar o valor de $h(T)$.

Lema 4.1.4. *Se α_1 é uma cobertura geradora topológica, então $h(T) = h(T, \alpha_1)$.*

Seja α_2 uma cobertura aberta de M. Uma vez que α_1 é geradora topológica, existe m tal que $\alpha_2 \prec \alpha_1^{\Lambda_m}$. Disso, $h(T, \alpha_2) \leq h(T, \alpha_1^{\Lambda_m})$. Pelo Lema 4.1.3, temos que $h(T, \alpha_1^{\Lambda_m}) = h(T, \alpha_1)$ e com isso, $h(T, \alpha_2) \leq h(T, \alpha_1)$. Como α_2 é uma cobertura aberta arbitrária, segue que $h(T) = \sup_\alpha h(T, \alpha) = h(T, \alpha_1)$.

4.1.1 Entropia Topológica de Shifts Multidimensionais

Vamos determinar a entropia topológica de shifts e subshifts multidimensionais usando a definições da seção anterior. Da mesma forma de antes, $G = \mathbb{Z}^d$, onde d é um inteiro positivo. Seja A um conjunto não-vazio finito (ou um alfabeto finito) com a topologia discreta. Consideramos A^G com a topologia produto, fazendo de A^G um espaço compacto (pelo Teorema de Tychonoff). Por exemplo, para o Modelo de Ising, $A = \{-1, 1\}$. Para cada conjunto finito $\Lambda \subset G$ e cada $x \in A^G$, $x|\Lambda$ é a restrição de x a Λ e para cada subconjunto $X \subset A^G$, escrevemos $X|\Lambda := \{x|\Lambda; x \in X\}$. Com isso, $A^\Lambda := \{x|\Lambda : x \in A^G\}$. Para cada $a \in A^\Lambda$, escrevemos $[a] = \{x \in A^G; x|\Lambda = a\}$. Observe que $[a]$ é um conjunto não-vazio, aberto e fechado na topologia produto e $\{[a]; a \in A^\Lambda\}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos dois-a-dois e que cobrem A^G. Observe ainda que $\{[a] : a \in \cup_{n=0}^{\infty} A^{\Lambda_n}\}$ é a base da topologia produto de A^G.

Um *shift multidimensional* de G sobre A^G é a ação $\sigma : G \times A^G \to A^G$ dada por $\sigma^b(x_a) = x_{a+b}$, para todo $a, b \in G$ e $x \in A^G$. Nesse contexto, o par (A^G, σ) é chamado *full shift*. A cobertura aberta canônica de A^G é $\alpha = \{[a]; a \in A^{\Lambda_0}\} = \{[a] : a_0 \in A\}$, onde $\Lambda_0 = \{0\}^d$. Para cada conjunto finito $\Lambda \subset G$, temos que $\alpha^\Lambda = \{[a]; a \in A^\Lambda\}$. Baseado nisso, podemos calcular a entropia topológica do full shift.

Lema 4.1.5. *A cobertura aberta canônica $\alpha = \{[a] : a_0 \in A\}$ é uma cobertura geradora topológica de A^G.*

seja γ uma cobertura aberta de A^G. Uma vez que A^G é compacto, γ admite uma subcobertura finita γ', ou seja, $\gamma' = \cup_{j=1}^{q} B_j$. Os conjuntos dessa cobertura são da forma $B_j = \{x \in A^G : X|C_j = a\}$, onde C_j é um subconjunto qualquer de $\mathbb{Z}^d$. Seja m suficientemente grande para que $C_j \subset \Lambda_m$ para todo $j = 1, 2, ..., q$. Com isso, para todo $U = \{x \in A^G : x|\Lambda_m = a\} \in \alpha^{\Lambda_m}$, temos $U \subset B_j \in \gamma$. De fato, $\gamma \prec \alpha^{\Lambda_m}$ e portanto α é geradora topológica de A^G.

Proposição 4.1.6. $h(\sigma) = \log |A|$.

Pelo Lema 4.1.5, α é uma cobertura geradora topológica de A^G. Para todo $n \geq 1$, $N(\alpha^{\Lambda_n}) = |\alpha^{\Lambda_n}| = |A|^{|\Lambda_n|}$. Disso, $H(\alpha^{\Lambda_n}) = \log N(\alpha^{\Lambda_n}) = |\Lambda_n| \log |A|$, para todo $n \geq 1$. Logo, $h(\sigma, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} = \log |A|$ e portanto, pelo Lema 4.1.3, segue que $h(\sigma) =$

$h(\sigma, \alpha) = \log |A|$.

Um conjunto $X \subset A^G$ é *invariante pelo shift* se $\sigma^b(x) \in X$ para todo $b \in G$ e todo $x \in X$. Um conjunto $X \subset A^G$ fechado e invariante pelo shift é chamado de *subshift*. Agora, estamos olhando para o sistema $(X, \sigma|_{G\times X})$, ou seja, para o full shift agindo no conjunto X. Também é possível obter a entropia $h(X)$ do subshift X, como mostrado na próxima proposição.

Proposição 4.1.7. $h(X) := h(\sigma|_{G\times X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |X|_{\Lambda_n}|}{|\Lambda_n|}$.

Observe que para todo $n \geq 1$, $\alpha^{\Lambda_n} = \{[a] : a \in X|_{\Lambda_n}\}$ é uma cobertura aberta disjunta de X. Com isso, $N(\alpha^{\Lambda_n}) = |X|_{\Lambda_n}|$ para todo $n \geq 1$. Como α é uma cobertura geradora topológica, pelo Lema 4.1.3, temos que $h(X) = h(\sigma|_{G\times X}, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(\alpha^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |X|_{\Lambda_n}|}{|\Lambda_n|}$.

No caso do Modelo de Ising que estudamos no capítulo 3, temos $A = \{-1, 1\}$ com o shift de dimensão d. Dessa forma, pela Proposição 4.1.6, temos que a entropia topológica do fullshift no modelo de Ising é $\log 2$.

Exemplo: Hard Square.

Seja $A = \{1, ..., k\}$ um alfabeto finito e seja $B = (B_{i,j})$ uma matriz quadrada de dimensão k, cujos coeficientes tomam apenas os valores 0 ou 1 e tal que nenhuma linha ou coluna é identicamente nula. A esse tipo de matriz chamamos de *matriz de transição*. Considere o subconjunto $\Sigma_B \subset A^{\mathbb{Z}}$ das sequências que são *B-admissíveis*, ou seja, tais que $B_{x_n,x_{n+1}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Observe que Σ_B é invariante pelo shift $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$. Note também que Σ_B é fechado em $A^{\mathbb{Z}}$ e, portanto, Σ_B é um compacto. Denotamos por $\sigma_B : \Sigma_B \to \Sigma_B$ o subshift bilateral de tipo finito associado à matriz de transição B. É útil associar à matriz de transição A um grafo $G_B := \{(a, b) \in B \times B : B_{a,b} = 1\}$, ou seja, G_B é o grafo cujos vértices são os pontos de A e, dessa forma, $B_{i,j} = 1$ quando há um aresta de i para j e $B_{i,j} = 0$ caso contrário. Um resultado conhecido nesse contexto é o seguinte:

Proposição 4.1.8. *A entropia topológica de um subshift bilateral de tipo finito* σ_B :

$\Sigma_B \to \Sigma_B$ é dada por $h(\sigma_B) = \log \lambda_B$, onde λ_B é o maior autovalor da matriz de transição B.

Ver [OV15], página 316.

O *Golden Mean Shift* ou *Hard Square de dimensão 1* é um subshift em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ consistindo de todas as sequências bilaterais que não contêm 1 seguido de 1, ou seja, não é permitido que se apareça o padrão $\{11\}$. Podemos verificar que a sua matriz de transição é dada por

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O maior autovalor dessa matriz é o número de ouro, dada por $\lambda_B = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Portanto, sua entropia topológica é $h(\sigma_B) = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Agora, considere o modelo de Ising de dimensão 2. Seja o conjunto de todas as configurações no reticulado inteiro tal que não seja permitido que se apareça dois spins $\sigma = -1$ consecutivos em nenhuma das direções. Qual seria a entropia topológica desse subshift? Este exemplo é equivalente ao exemplo do *hard-square* de dimensão 2.

O hard square de dimensão 2, é o subconjunto do reticulado $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ onde não é permitido que se tenha 1 em vértices consecutivos em nenhuma das direções. Mesmo sendo um exemplo bastante simples (alfabeto com apenas dois símbolos e dimensão d =2) não se sabe exatamente qual é sua entropia topológica ([Pav10]). Esse assunto é bastante estudado e tenta-se aproximar e caracterizar números que são entropia topológica de algum subshift multidimensional como é visto em [HM10].

4.2 Entropia Métrica de Ações do Grupo Aditivo $\mathbb{Z}^d$

Seja (M, μ) um espaço de probabilidade. Dizemos que a ação $T : G \times M \to M$ *preserva a medida* μ quando $\mu(T^{-a}(P)) = \mu(P)$, para cada $a \in G$ e para todo subconjunto mensurável $P \subset M$. Já vimos no capítulo 1 que dada uma partição $\mathcal{P}$ de M, a sua entropia é dada por $H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$. Além disso, para quaisquer partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ vale que

$H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$. Agora, para cada $a \in G$ e para cada partição $\mathcal{P}$ de M, $\mathcal{P}^a := T^{-a}(\mathcal{P}) := \{T^{-a}(P); P \in \mathcal{P}\}$ é uma nova partição de M. Disso, dado qualquer $\Lambda \subset G$, podemos definir a partição $\mathcal{P}^\Lambda = \bigvee_{a\in\Lambda} \mathcal{P}^a$. Como T preserva a medida μ, temos que $H_\mu(T^{-a}(\mathcal{P})) = H_\mu(\mathcal{P})$ para toda partição $\mathcal{P}$ e todo $a \in G$. Em cima disso,

$$H_\mu(\mathcal{P}^\Lambda) = H_\mu(\bigvee_{a\in\Lambda} \mathcal{P}^a) = H_\mu(\mathcal{P} \vee T^{-a_1}(\mathcal{P}) \vee ... \vee T^{-a_{|\Lambda|-1}}(\mathcal{P}))$$
$$\leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(T^{-a_1}(\mathcal{P})) + ... + H_\mu(T^{-a_{|\Lambda|-1}}(\mathcal{P})) \leq |\Lambda| H_\mu(\mathcal{P}).$$

Com isso, definimos a *entropia de T com relação à medida μ e à partição $\mathcal{P}$* por

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{H_\mu(\mathcal{P}^{\Lambda_n})}{|\Lambda_n|}. \tag{4.3}$$

E por fim, definimos a *entropia de T com relação à medida μ* como sendo o número

$$h_\mu(T) := \sup_{\mathcal{P}} \{h_\mu(T, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ é partição mensurável de } M\}. \tag{4.4}$$

Para que a entropia métrica esteja bem definida, o limite (4.3) deve existir.

Lema 4.2.1. *O limite* (4.3) *existe.* A demonstração é idêntica à realizada para o Lema 4.1.2. Basta apenas notar que $H_\mu(\mathcal{P}^{\Lambda_m}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^{\Lambda_n})$ para todo $m \leq n$ e que $H_\mu(\mathcal{P}^{\Lambda_{nk}}) \leq k^d H_\mu(\mathcal{P}^{\Lambda_n})$ para todo $k \geq 1$.

4.2.1 Entropia Métrica de Shifts Multidimensionais

Sejam d um inteiro positivo, $G = \mathbb{Z}^d$, A um alfabeto finito e $X \subset A^G$ um subshift. Uma medida μ em X é invariante pelo shift $\sigma : G \times A^G \to A^G$ quando $\mu(\sigma^{-a}(P)) = \mu(P)$ para todo boreliano $P \subset X$ e todo $a \in G$. Um conjunto $P \subset X$ é invariante quando $\sigma^{-a}(P) \subset P$ para todo $a \in G$. O sistema X, σ, μ é chamado de *ergódico* se para todo subconjunto invariante mensurável $P \subset X$ temos que $\mu(P) = 0$ ou $\mu(P) = 1$. Nesses caso, escrevemos

$$h_\mu(X, \mathcal{P}) := h_\mu(\sigma|_{G\times X}, \mathcal{P})$$

e, consequentemente,

$$h_\mu(X) := \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(X, \mathcal{P}).$$

Como foi feito para o caso de entropia topológica, pode se mostrar que $h_\mu(X) = h_\mu(X, \mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ é a partição mensurável canônica de X, dada por $\mathcal{P} = \{[a] \cap X; a \in A\}$ (ver [Sim17]).

Nesse contexto de shifts multidimensionais também há um *Princípio Variacional* conectando a entropia topológica e entropia métrica.

Teorema 4.2.2. (Princípio Variacional para Shifts Multidimensionais). *Para qualquer subshift $X \subset A^G$ temos que $h(X) = \sup_\mu h_\mu(X)$, onde o supremo é tomado sobre o conjunto das medidas de probabilidade invariantes e ergódicas em X.*

Ver [Mis76].

Uma pergunta que surge naturalmente: quantas medidas de entropia máxima podem existir para um subshift? Veremos a seguir que a resposta para essa pergunta depende da dimensão do shift.

4.3 Unicidade de Medidas de Máxima Entropia para Shifts de Tipo Finito

Pelo seguinte resultado temos que em dimensão 1 há apenas uma única medida que maximiza a entropia métrica.

Teorema 4.3.1 *Sejam $A = \{1, 2, ..., k-1\}$ um alfabeto finito, $\Sigma = A^{\mathbb{Z}}$ e $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ o fullshift bilateral. Então σ tem uma única medida com máxima entropia.*

Sabemos que $h(\sigma) = \log k$. Suponha $h_\mu(\sigma) = \log k$. Seja $\mathcal{P} = \{P_0, ..., P_{k-1}\}$ uma partição geradora ($P_j = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_0 = j\}$). Então

$$\log k = h_\mu(\sigma) \leq \frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{j=0}^{n-1} \sigma^{-j}(\mathcal{P})) \leq \frac{1}{n} n.H_\mu(\mathcal{P}) = \log k.$$

Disso, temos que $H_\mu(\bigvee_{j=0}^{n-1} \sigma^{-j}(\mathcal{P})) = \log k^n$, o que implica que cada membro de $(\bigvee_{j=0}^{n-1} \sigma^{-j}(\mathcal{P}))$ tem medida $\frac{1}{k}$. Portanto, μ é a medida de Bernoulli uniforme com $\mu(P_j) = \frac{1}{k}$ para todo j.

Teorema 4.3.2 *Seja $\sigma : \Sigma_B \to \Sigma_B$ um subshift de tipo finito unidimensional bilateral associado à uma matriz de transição irredutível B. Então existe uma única medida de máxima entropia.*

Ver [Wa82].

A unicidade não é garantida para qualquer subshift de dimensão $d \geq 2$. Para justificar essa afirmação, vamos introduzir um dos exemplos de não unicidade devido à Robert Burton e Jeffrey Steif em [BS94].

Exemplo (Modelo de Ising generalizado). Seja L um inteiro positivo e seja o conjunto de símbolos dado por $A = \{-L, -L+1, ..., -1, 0, 1, ..., L-1, L\}$. Considere o fullshift como $A^{\mathbb{Z}^d}$ e defina o subshift $X \subset A^{\mathbb{Z}^d}$ como o conjunto de todas configurações que não apresentam dois spins de mesmo sinal como vizinhos próximos, a não ser que sejam o +1 e -1. Observe que este exemplo se reduz ao Modelo de Ising quando $L = 1$.

Teorema 4.3.3 (Burton, Steiff, 1994) *Considere o subshift X do exemplo acima e seja $d \geq 2$. Se $L > 4e28^d$, então existem exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia.*

Ver [BS94].

Referências

[AKM65] R. Adler, A. Konheim, and M. McAndrew. Topological entropy. Trans. Amer.Math. Soc., 114:309-319, 1965.

[Bar11] L. Barreira. Thermodynamic formalism and applications to dimension theory. Birkhauser, 2011.

[Bar12] L. Barreira. Ergodic theory, hyperbolic dynamics and dimension theory. Springer Verlag, 2012.

[Bow75] R. Bowen. Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Vol. 470 of Lect. Notes in Math., Spring Verlag, 1975.

[Bru14] H. Bruin. Notes on Thermodynamic formalism. University of Viena, 2014.

[BS94] R. Burton, J. Steif. Nonuniqueness of measures of maximal entropy for subshifts of finite type. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 14: 213-235, 1994.

[Din70] E. Dinaburg. A correlation between topological entropy and metric entropy. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 190:19?22, 1970.

[Dob68] R. L. Dobrushin. The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. Theory Prob. Applications 13: 197-224, 1968.

[Fey72] R. Feynman. Statistical Mechanics. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1972.

[FKG71] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. Comm.Math. Phys., 22:89-103, 1971.

[FV16] S. Friedli, Y. Velenik. Statistical Mechanics of lattice systems: a concrete mathematical introduction. Cambridge University Press, 2016 (Preprint).

[Gri67] R. B. Griffiths. Correlation in Ising ferromagnets I, II. J. Math. Phys., 8:478-489, 1967.

[HM10] M. Hochman, T. Meyerovitch. A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type. Annals of Mathematics, 171: 2011-2038, 2010.

[Mañ87] R. Mañé. Ergodic theory and differentiable dynamics. Springer Verlag, 1987.

[Min00] R. Minlos. Introduction to mathematical statistical physics. University Lecture Series, vol. 19, 2000.

[Mis76] M. Misiurewicz. A short proof of the variational principle for a Z_+^N-action on a compact space. Soc. Math. France, Astérisque 40: 147-157, 1976.

[MS01] R. Meester, J. Steif. Higher-dimensional subshifts of finite type, factor maps and measures of maximal entropy. Pacific Journal of Mathematics, 200: 497-510, 2001.

[Ny08] A. Ny. Introduction to (generalized) Gibbs Measures. Ensaios Matemáticos, 15: 1-126, 2008.

[OV15] K. Oliveira, M. Viana. Fundamentos da Teoria Ergódica. Coleção Fronteiras da Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[Pav10] R. Pavlov. Approximating the hard-square entropy constant with probabilistic methods. ArXiv:1011.1983, v1, 2010.

[Rue68] D. Ruelle. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. Commun. Math. Phys. 9: 267-278, 1968.

[Rue69] D. Ruelle. Statistical Mechanics: rigorous results. Mathematical Physics Monograph Series, 1969.

[Rue04] D. Ruelle. Thermodynamic formalism. Cambridge University Press, second edition, 2004.

[Sim17] S. Simpson. Entropy = dimension = complexity. Draft, 2017 (Preprint).

[Sin82] Y. Sinai. Theory of phase transitions: rigorous results. Pergamon Press, 1982.

[Wal75] P. Walters. A variational principle for the pressure of continuous transformations. Amer. J. Math. 97:937-971, 1975.

[Wal82] P. Walters. Introduction to ergodic theory. Spring Verlag, 1982.